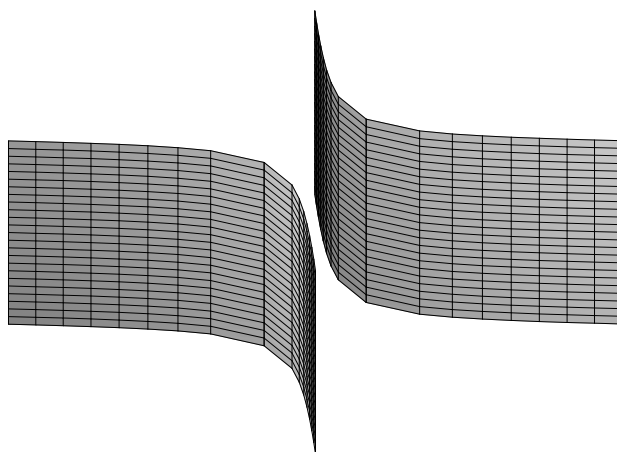


РУМЕН НИКОЛОВ ДАСКАЛОВ
ЕЛЕНА МЕТОДИЕВА ДАСКАЛОВА

В И С Ш А М А Т Е М А Т И К А

ЧАСТ I



Основи на линейната алгебра и
аналитичната геометрия

Габрово, 2012

Автори: Авторите са преподаватели в катедра “Математика“ на Технически университет - Габрово

проф. дмн Румен Николов Даскалов е завършил ФМИ на СУ“Св. Кл. Охридски“. Защитил е дисертационен труд в областта на комбинаторната теория на кодирането. Член е на American Mathematical Society (AMS), The Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) и Съюз на математиците в България (СМБ).

доц. д-р Елена Методиева Даскалова е завършила ФМИ на СУ“Св. Кл. Охридски“. Защитила е дисертационен труд в областта на комбинаторната теория на кодирането.

В И С Ш А М А Т Е М А Т И К А, Част I,

Основи на линейната алгебра и аналитичната геометрия.

Учебник за студенти от инженерно-технически специалности.

Второ, коригирано издание, 151 стр.

ПРЕДГОВОР

Учебникът “Висша математика“, част I, е предназначен за студенти от Технически университет - Габрово с образователно-квалификационна степен “бакалавър“.

Основната цел на учебника е да намери необходимия баланс между последователното, логическо изграждане на математическите понятия и усвояването им от бъдещите инженери като основен апарат за изучаване на съответните общотехнически и специални дисциплини и използването им в бъдещите приложни и научни изследвания. В съответствие с ограничения хорариум, ударението е поставено на втората страна, като изложението е подкрепено с множество примери и подробно решени задачи.

Разгледани са следните раздели: комплексни числа; полиноми; матрици; детерминанти; системи линейни уравнения; вектори; равнини и прави в пространството; прави в равнината; елипса, хипербола и парабола; смяна на координатната система; канонизация на криви линии от втора степен; повърхнини от втора степен. Това е материалът, който се изучава от студентите от всички специалности през първия семестър.

Всяка глава съдържа съответния теоретичен материал, примери, голям брой решени задачи и задачи за самостоятелна подготовка. Всички задачи имат отговори, което ще улесни студентите при самостоятелната им работа.

Учебникът ще бъде особено полезен за студенти задочно и дистанционно обучение.

Август 2012 г.

Авторите

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Комплексни числа	5
2. Полиноми	17
3. Матрици и детерминанти	33
4. Ранг на матрица	55
5. Системи линейни уравнения	61
6. Вектори	75
7. Равнина и права в пространството	93
8. Права в равнината	109
9. Елипса, хипербола, парабола	121
10. Трансформация на координатната система	135
11. Повърхнини от втора степен	143
12. Литература	151

Глава 1

Комплексни числа

Целта на тази глава е да запознае читателя с множеството на комплексните числа, което е разширение на множеството на реалните числа. Ще научите, че има две основни форми на комплексните числа - алгебричен вид и тригонометричен вид; ще извършвате основните операции с комплексни числа; ще можете да решавате някои алгебрични уравнения, които нямат решение в множеството на реалните числа.

Множеството на естествените числа

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\},$$

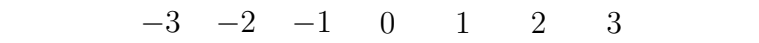
множеството на целите числа

$$\mathcal{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\},$$

множеството на рационалните числа

$$\mathcal{Q} = \{x = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0, \quad p, q \in \mathcal{Z}\},$$

и множеството на реалните числа $\mathcal{R}$ са добре познати от училищния курс по математика. Всяко едно от тях съдържа предходното, т.е. $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$. Освен това между множеството $\mathcal{R}$ и реалната права има взаимно-еднозначно съответствие, като на всяко реално число съответства точка от правата и обратно.



В множеството на реалните числа има уравнения, които нямат решение. Такова е например уравнението $x^2 + 1 = 0$. Тогава е естествено да си поставим въпроса: Има ли множество, което да е разширение на множеството на реалните числа и в него уравнението $x^2 + 1 = 0$ и други като него да имат решение? Отговорът е положителен. Такова множество е множеството на комплексните числа, с което ще се запознаем в тази глава.

Комплексните числа са наредени двойки $z = (x, y)$ от реални числа. Числата от вида $z = (x, 0)$ се отъждествяват с реалните числа, т.е. $x = (x, 0)$, а числата от вида $z = (0, y)$ се наричат **чисто имагинерни**.

Комплексното число $i = (0, 1)$ се нарича **имагинерна единица**. За нея е изпълнено

$$i^2 = -1$$

Комплексните числа могат да се представят в **алгебричен** и **тригонометричен вид**. В **алгебричен вид** се записват по следния начин

$$z = x + y.i$$

Числата x и y се наричат съответно **реална част** и **имагинерна част** на комплексното число. Означават се с $Re\ z$ и $Im\ z$.

Обърнете внимание на това, че имагинерната част на комплексното число $z = x + iy$ е реалното число y , записано до имагинерната единица, а не целият израз yi .

Например, числото $z = 3 - 5i$ има реална част 3 и имагинерна част -5 .

Числото $\bar{z} = x - yi$ се нарича **комплексно спрегнато** на $z = x + yi$.

Операциите с комплексни числа, записани в алгебричен вид, се задават с формулите:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \quad (1.1)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \quad (1.2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \quad (1.3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}i \quad (1.4)$$

$(x_2^2 + y_2^2 \neq 0)$

Тези формули се запомнят лесно: при умножението на две комплексни числа, записани в алгебричен вид, извършваме умножение на изразите в скобите и заместяваме i^2 с -1 ; при деление на две комплексни числа, записани в алгебричен вид, умножаваме числителя и знаменателя с комплексно спрегнатото на знаменателя и извършваме умножението по описания по-горе начин.

Пример 1.1: Дадени са комплексните числа $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 1 + i$. Пресметнете $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение:

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 + i) = (2 + 1) + (3 + 1)i = 3 + 4i$$

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (1 + i) = (2 - 1) + (3 - 1)i = 1 + 2i$$

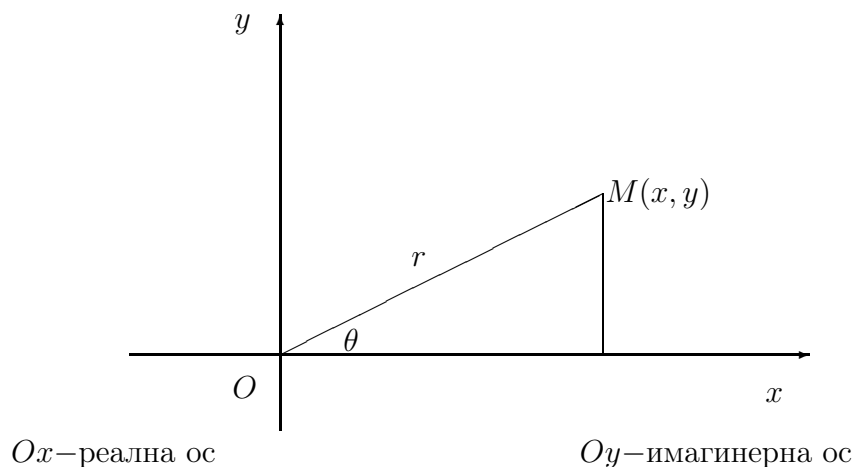
$$z_1 z_2 = (2 + 3i)(1 + i) = 2 + 2i + 3i + 3i^2 = 2 + 5i + 3(-1) = -1 + 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1+i} = \frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i+3i+3}{1+1} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$$

Решете самостоятелно пример 1.2:

Пример 1.2: Дадени са комплексните числа $z_1 = 3-4i$ и $z_2 = 1+2i$. Пресметнете $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

Отг. $4-2i$, $2-6i$, $11+2i$, $-1-2i$.



Чертеж 1

Ако в равнината е въведена правоъгълна координатна система, то между множеството на комплексните числа и точките в равнината съществува взаимно-еднозначно съответствие, като на всяко комплексно число $z = x + yi$ се съпоставя точката (x, y) с абсциса x и ордината y . Поради това съответствие равнината се нарича още **комплексна или Гаусова равнина**.

Векторът с начало началото на координатната система и край дадена точка от равнината се нарича **радиус-вектор** на тази точка. Да означим с r дължината на радиус-вектора на точката (x, y) и с θ ъгъла, който сключва радиус-векторът на тази точка с положителната посока на абсцисната ос.

Числото r се нарича **модул** на комплексното число z и се бележи с $r = |z|$. Следователно модулът на комплексното число е равен на разстоянието от началото на координатната система до точката (x, y) , изобразяваща числото. Той е неотрицателно реално число.

Ъгълът θ се нарича **аргумент** на комплексното число и се бележи с $\arg z$. Стойностите му могат да бъдат както положителни, така и отрицателни. За положителна посока е приета посоката, обратна на часовниковата стрелка. Всички аргументи на комплексното число се различават с целочислени кратни на 2π . Ако $0 \leq \arg z \leq 2\pi$, той се нарича **главна стойност** на аргумента и се бележи с $\text{Arg } z$.

Зависимостите между x , y и r, θ са следните (виж черт. 1):

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (1.5)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad x \neq 0 \quad (1.6)$$

Следователно

$$z = x + yi = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.7)$$

В този случай казваме, че комплексното число $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ е записано в **тригонометричен вид**.

Обърнете внимание на това, че при тригонометричния вид на комплексното число *взглът* при функциите синус и косинус *е един и същ*

Тригонометричният вид на комплексните числа е по-удобен за извършване на операциите умножение, деление, степенуване и коренуване.

Нека $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ са комплексни числа.

Тогава

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (1.8)$$

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad (1.9)$$

където n е естествено число. Формула (1.12) се нарича **формула на Моавър**.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (1.10)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (1.11)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

В последната формула за коренуване на комплексни числа под $\sqrt[n]{r}$ се разбира аритметичният корен от неотрицателното число r . От нея също се вижда, че намирането на n -ти корен от комплексно число е възможно винаги. Съществуват n на брой различни стойности (получаваме ги, давайки на k стойности $0, 1, 2, \dots, n-1$). Съответните им точки са разположени в комплексната равнина върху една централна окръжност с радиус $\sqrt[n]{r}$ и я делят на n равни части, т.е. лежат във върховете на правилен n -ъгълник.

Запомнете:

1. При умножение на комплексни числа, записани в тригонометричен вид, модулите се умножават, а аргументите се събират.
2. При деление на комплексни числа, записани в тригонометричен вид, модулите се делят, а аргументите се изваждат.

Ще докажем равенства (1.8) и (1.11). Равенство (1.9) се получава след прилагане неколкократно на (1.8), а (1.10) се доказва аналогично на (1.8).

$z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$. С това формула (1.8) е доказана.

Нека сега

$$\sqrt[n]{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Повдигаме двете страни на последното равенство на n -та степен, прилагаме формулата на Моавър и получаваме

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho^n[\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)].$$

Но две комплексни числа, зададени в тригонометричен вид, са равни, ако имат равни модули, а аргументите им се различават с целочислено кратно на 2π . Следователно

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi.$$

Различните стойности на $\sqrt[n]{z}$ се получават, като даваме на k стойности от 0 до $n - 1$. Ако продължим да даваме на k стойности $n, n + 1, \dots$, то получените стойности ще започнат да се повтарят. С това формула (1.11) е доказана.

Пример 1.3: Дадени са комплексните числа $z_1 = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ и $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$. Пресметнете $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_2^3 , $\sqrt[3]{z_1}$.

Решение:

$$z_1 z_2 = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 8(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12})$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})}{2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})} = 2(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$$

$$z_2^3 = [2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})]^3 = 8(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{4(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})} = \sqrt[3]{4}(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}) \quad k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$ получаваме първата стойност на корена - $w_0 = \sqrt[3]{4}(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9})$.

При $k = 1$ - втората стойност на корена - $w_1 = \sqrt[3]{4}(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9})$.

При $k = 2$ - третата стойност на корена - $w_2 = \sqrt[3]{4}(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9})$.

Числата w_0 , w_1 и w_2 лежат на централна окръжност с радиус $\sqrt[3]{4}$ и са върхове на равностранен триъгълник.

Както знаем от училищния курс по математика, в множеството на реалните числа има наредба. Това означава, че ако са дадени две реални числа, то или двете са

равни или едното е по-голямо от другото. **В множеството на комплексните числа няма наредба** т.е. при комплексните числа не можем да казваме, че едно комплексно число е по-голямо или по-малко от друго.

ЗАДАЧИ

1.1 Извършете означените действия и резултата запишете в алгебричен вид.

а) $(2 + 3i)(4 - 5i)$

б) $(1 + 3i)(2 + i)(1 - i) + 4i$

в) $(1 + i)(2 - i)^2 + 3i$

г) $\frac{3 + i}{1 + i}$

д) $\frac{1 - i}{1 + i} + 2i$

е) $\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^5 + 2i$

Решение:

а) Разкриваме скобите и получаваме

$$(2 + 3i)(4 - 5i) = 8 - 10i + 12i - 15i^2 = 23 + 2i.$$

б) Аналогично

$$(1 + 3i)(2 + i)(1 - i) + 4i = (-1 + 7i)(1 - i) + 4i = 6 + 8i + 4i = 6 + 12i.$$

в) При този пример използваме формулата $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(1 + i)(2 - i)^2 + 3i = (1 + i)(4 - 4i - 1) + 3i = (1 + i)(3 - 4i) + 3i = 7 + 2i.$$

г) Умножаваме числителя и знаменателя с комплексно спрегнатото на знаменателя (формула 1.4) и получаваме

$$\frac{3 + i}{1 + i} = \frac{(3 + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$$

д)

$$\frac{1 - i}{1 + i} + 2i = \frac{(1 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} + 2i = \frac{-2i}{2} + 2i = -i + 2i = i$$

е) От д) знаем, че $\frac{1 - i}{1 + i} = -i$. Следователно

$$\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^5 + 2i = -i^5 + 2i = -i + 2i = i.$$

1.2 Намерете реалните числа x и y , за които е изпълнено

$$(1 - i).x + (-2 + 5i).y = -1 + 7i$$

Решение: Извършваме означените действия и получаваме

$$(x - 2y) + (-x + 5y)i = -1 + 7i$$

Като приравним съответно реалните и имагинерните части на числата, стоящи от двете страни на равенството, получаваме системата

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 5y = 7 \end{cases}$$

Решаваме тази система от две линейни уравнения с две неизвестни и получаваме $x = 3$ и $y = 2$.

1.3 Решете системата

$$\begin{cases} (1 - i)z_1 + (2 + i)z_2 = 8 + 5i \\ (2 - i)z_1 - (2 + 3i)z_2 = -4 - 5i \end{cases}$$

Решение: Умножаваме първото уравнение с $(2 + 3i)$, второто с $(2 + i)$ и ги събираме:

$$\begin{aligned} \Rightarrow (10 + i)z_1 &= -2 + 20i = 2(-1 + 10i) \\ \Rightarrow z_1 &= 2 \frac{-1 + 10i}{10 + i} = 2 \frac{(-1 + 10i)(10 - i)}{101} = 2 \frac{101i}{101} = 2i \end{aligned}$$

Заместваме намерената стойност на z_1 в първото уравнение и получаваме:

$$z_2 = \frac{6 + 3i}{2 + i} = \frac{3(2 + i)}{(2 + i)} = 3.$$

1.4 Представете в тригонометричен вид числата

$$1, 3, -2, -5, i, 5i, -i, -3i.$$

Решение: Положителните реални числа имат аргумент 0, отрицателните реални числа имат аргумент π . Чисто имагинерните числа с положителна имагинерна част имат аргумент $\frac{\pi}{2}$, а чисто имагинерните числа с отрицателна имагинерна част имат аргумент $\frac{3\pi}{2}$. Следователно:

$$\begin{aligned} 1 &= 1(\cos 0 + i \sin 0) & 3 &= 3(\cos 0 + i \sin 0) \\ -2 &= 2(\cos \pi + i \sin \pi) & -5 &= 5(\cos \pi + i \sin \pi) \\ i &= 1(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) & 5i &= 5(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \\ -i &= 1(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) & -3i &= 3(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) \end{aligned}$$

При решаването на следващите задачи ще е полезна следната таблица:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.5 Представете в тригонометричен вид числата

а) $1 + i$ б) $-1 + i$ в) $1 + i\sqrt{3}$

г) $\sqrt{3} + i$ д) $-1 + i\sqrt{3}$ е) $-\sqrt{3} - i$

ж) $1 - i$ з) $\sqrt{3} - i$ и) $-2 - 2i$

Решение:

а) За да напишем тригонометричния вид на комплексното число $z = 1 + i$ трябва да пресметнем неговия модул и аргумент. Числото $z = 1 + i$ има реална част $x = 1$ и имагинерна част $y = 1$. Следователно

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

От условието $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = 1$ не можем да определим еднозначно аргумента θ , но тъй като числото лежи в първи квадрант, следва че $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\implies 1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

б) Числото $z = -1 + i$ има реална част $x = -1$ и имагинерна част $y = 1$. Следователно

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$\operatorname{tg} \theta = -1$ и тъй като числото лежи във втори квадрант, следва че $\theta = \frac{3\pi}{4}$

$$\implies -1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$$

в) Числото $z = 1 + i\sqrt{3}$ има реална част $x = 1$ и имагинерна част $y = \sqrt{3}$. Следователно

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}$ и тъй като числото лежи в първи квадрант, следва че $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$\implies 1 + i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

г) Числото $z = \sqrt{3} + i$ има реална част $x = \sqrt{3}$ и имагинерна част $y = 1$.
Следователно

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и тъй като числото лежи в първи квадрант, следва че $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \sqrt{3} + i = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

д) Числото $z = -1 + i\sqrt{3}$ има реална част $x = -1$ и имагинерна част $y = \sqrt{3}$.
Следователно

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$ и тъй като числото лежи във втори квадрант, следва че $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$$

е) Числото $z = -\sqrt{3} - i$ има реална част $x = -\sqrt{3}$ и имагинерна част $y = -1$.
Следователно

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и тъй като числото лежи в трети квадрант, следва че $\theta = \frac{7\pi}{6}$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$$

ж) Числото $z = 1 - i$ има реална част $x = 1$ и имагинерна част $y = -1$.
Следователно

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$\operatorname{tg} \theta = -1$ и тъй като числото лежи в четвърти квадрант, следва че $\theta = \frac{7\pi}{4}$

$$\Rightarrow 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$$

з) Числото $z = \sqrt{3} - i$ има реална част $x = \sqrt{3}$ и имагинерна част $y = -1$.
Следователно

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$\operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и тъй като числото лежи в четвърти квадрант, следва че $\theta = \frac{11\pi}{6}$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$$

и) Числото $z = -2 - 2i$ има реална част $x = -2$ и имагинерна част $y = -2$.
Следователно

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$\operatorname{tg} \theta = 1$ и тъй като числото лежи в трети квадрант, следва че $\theta = \frac{5\pi}{4}$

$$\implies -2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$$

1.6 Намерете решението на уравнението

$$(i - z) \cdot (1 + 2i) + (1 - iz) \cdot (3 - 4i) = 1 + 7i$$

и го запишете в алгебричен и тригонометричен вид.

Решение: Извършваме означените действия и получаваме:

$$-(5 + 5i)z + 1 - 3i = 1 + 7i$$

$$\implies -(5 + 5i)z = 10i$$

$$\implies z = -\frac{10i}{5 + 5i} = -2\frac{i}{1 + i} = -2\frac{i(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = -2\frac{1 + i}{2} = -1 - i$$

Комплексното число $z = -1 - i$ има модул $r = \sqrt{2}$ и аргумент $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

$$\implies z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right).$$

1.7 Извършете означените действия.

$$\text{а) } (1 + i)^{12} \qquad \text{б) } \frac{(\sqrt{3} + i)^{15}}{(1 + i)^{10}}$$

$$\text{в) } \sqrt[5]{i} \qquad \text{г) } \sqrt[4]{1 - i}$$

Решение:

а) Представяме числото в тригонометричен вид и прилагаме формулата на Моавър.

$$(1 + i)^{12} = \left[\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^{12} = 2^6(\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -64$$

б) Представяме числата в тригонометричен вид, прилагаме формулата на Моавър и извършваме делението.

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^{15}}{(1 + i)^{10}} = \frac{[2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})]^{15}}{[\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})]^{10}} = \frac{2^{15}(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2})}{2^5(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2})} = 2^{10} = 1024$$

в) Представяме числото i в тригонометричен вид и прилагаме формула (1.11).

$$\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)} = \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

г) Представяме числото $1-i$ в тригонометричен вид и прилагаме формула (1.11).

$$\sqrt[4]{1-i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)} = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

1.8 Решете уравненията:

а) $x^2 + 7 - 24i = 0$

б) $x^2 - (2+i)x + 7i - 1 = 0$

Решение:

а) $x^2 + 7 - 24i = 0 \iff x^2 = -7 + 24i$

Нека $x = a + bi$. Тогава $x^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

Следователно

$$a^2 - b^2 + 2abi = -7 + 24i$$

Приравнявайки реалните и имажинерните части на числата, стоящи от двете страни на горното равенство, получаваме системата

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 \\ ab = 12 \end{cases}$$

Решаваме тази система и получаваме $a = 3, b = 4$ или $a = -3, b = -4$.

Следователно решенията са

$$x_{1,2} = \pm(3 + 4i).$$

б) Квадратното уравнение $x^2 - (2+i)x + 7i - 1 = 0$ решаваме чрез познатата ни формула

$$x_{1,2} = \frac{2+i \pm \sqrt{4+4i-1+4-28i}}{2} = \frac{2+i \pm \sqrt{7-24i}}{2}$$

Пресмятаме $\sqrt{7-24i}$ по начина от точка а) и получаваме

$$x_{1,2} = \frac{2+i \pm \sqrt{7-24i}}{2} = \frac{2+i \pm (4-3i)}{2}$$

Следователно $x_1 = 3 - i, x_2 = -1 + 2i$.

Задачи за самостоятелна работа:**1.9** Извършете означените действия и резултата запишете в алгебричен вид.

$$\text{а) } (3 + 4i)(4 - i) \quad \text{отг. } 16 + 13i$$

$$\text{б) } (2 + 3i)(3 - i)(1 + i) - 2i \quad \text{отг. } 2 + 14i$$

$$\text{в) } (1 - 2i)(2 + i)^2 + 5i \quad \text{отг. } 11 + 3i$$

$$\text{г) } \frac{2 - i}{1 + 2i} \quad \text{отг. } -i$$

$$\text{д) } \frac{3 + i}{(1 + i)(1 - 2i)} \quad \text{отг. } \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$\text{е) } \frac{1}{1 + 4i} + \frac{1}{4 - i} \quad \text{отг. } \frac{5}{17} - \frac{3}{17}i$$

1.10 Намерете реалните числа x и y , за които е изпълнено

$$12[(2x + i) \cdot (1 + i) + (x + y)(3 - 2i)] = 17 + 6i.$$

$$\text{отг. } x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{4}$$

1.11 Решете системата

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

$$\text{отг. } z_1 = 1 - i, \quad z_2 = i$$

1.12 Представете в тригонометричен вид числата и ги изобразете като точки в комплексната равнина.

$$\text{а) } -8 \quad \text{отг. } 8(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\text{б) } -10i \quad \text{отг. } 10(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$$

$$\text{в) } -2 + 2\sqrt{3}i \quad \text{отг. } 4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

$$\text{г) } -\sqrt{3}i - 1 \quad \text{отг. } 2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$$

Глава 2

Полиноми

Целта на тази глава е да запознае читателя с рационалните функции. В нея ще разширите своите знания за полиномите (многочлените) и ще научите как се разлага правилна рационална функция на сума от елементарни дроби. След усвояване на материала вие ще можете да делите два полинома, да прилагате схемата на Хорнер, да решавате някои алгебрични уравнения с цели коефициенти, да разлагате правилна рационална функция на сума от елементарни дроби.

Полином (многочлен) се нарича функцията

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0 \quad (2.1)$$

Числата a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) се наричат **коефициенти** на полинома и могат да бъдат реални или комплексни. Коефициентът a_n се нарича **старши коефициент**, а коефициентът a_0 – **свободен член**.

Функция от вида ax^k се нарича **едночлен**. Ако $a \neq 0$ степента на едночлена е k . Следователно полиномите са сума от едночлени.

Най-високата от степените на едночлените се нарича **степен на полинома**. Степента на полинома $f(x)$ се означава с $\deg f(x)$.

Два полинома се наричат **тждествено равни**, ако приемат едни и същи стойности за всяка стойност на променливата x .

Теорема 2.1 *Необходимо и достатъчно условие два полинома да са тждествено равни е коефициентите пред съответните степени да са равни.*

Уравнението $f(x) = 0$ се нарича **алгебрично уравнение** от n -та степен.

Всяко число x_0 , за което е изпълнено $f(x_0) = 0$, се нарича **нула на полинома** $f(x)$ или **корен на уравнението** $f(x) = 0$.

От училищния курс по математика е известно, че сумата, разликата и произведението на два полинома е пак полином. Следващата теорема показва, че резултатът от делението на два полинома не винаги е полином.

Теорема 2.2 *За всеки два полинома $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ съществува единствена двойка полиноми $q(x)$ и $r(x)$, за които е изпълнено*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \quad (2.2)$$

Следствие 2.1 Числото a е нула на полинома $f(x)$ тогава и само тогава, когато $f(x)$ се дели на $x - a$ без остатък.

Пример 2.3 Да се пресметне $f(-3)$, ако $f(x) = 3x^7 - x^6 + 2x^4 - 64x^3 + x - 1$.

Решение: За да пресметнем $f(-3)$ прилагаме теоремата на Безу и използваме схемата на Хорнер.

	3	-1	0	2	-64	0	1	-1
$a = -3$	3	-10	30	-88	200	-600	1801	$-5404 = f(-3)$

Обърнете внимание на това, че когато липсват някои степени в полинома и прилагаме схемата на Хорнер, то на местата на липсващите степени записваме **нули**.

Ако $f(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$ и $g(a) \neq 0$, то числото a се нарича **k -кратна нула** на $f(x)$.

Теорема 2.4 (Основна теорема на алгебрата - Гаус) Всеки полином от ненулева степен има поне една нула в множеството на комплексните числа.

От основната теорема следва, че всеки полином от n -та степен има n на брой нули в множество на комплексните числа, ако всяка нула се брой толкова пъти, колкото е нейната кратност.

Ако $x_1, x_2, \dots, x_m$ ($m \leq n$) са нулите на полинома от n -та степен $f(x)$ с кратности съответно $k_1, k_2, \dots, k_m$ ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$), то $f(x)$ може да се представи във вида

$$f(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m} \quad (2.3)$$

Теорема 2.5 Ако един полином

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0$$

с цели коефициенти има рационална нула

$$x = \frac{p}{q} \quad (p, q - \text{взаимно прости цели числа}),$$

то p е делител на a_0 , а q е делител на a_n .

Доказателство: От това, че $x = \frac{p}{q}$ е нула на полинома $f(x)$ следва

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Следователно

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Тъй като изразът $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1}$ се дели на p , то следва че p трябва да дели $a_0 q^n$. Но p не дели q^n и следователно е делител на a_0 .

Аналогично изразът $a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$ се дели на q . Следователно q трябва да дели $a_n p^n$. Но q не дели p^n и следователно е делител на a_n . ■

Пример 2.4 Намерете нулите на полинома $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2$.

Решение:

Тъй като полиномът е с цели коефициенти, можем да приложим Теорема 2.5 и да търсим рационални нули $x = \frac{p}{q}$ на този полином.

$$p \text{ дели } 2 \implies p = \pm 1, \pm 2$$

$$q \text{ дели } 3 \implies q = \pm 1, \pm 3$$

$$\implies x = \frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$$

Сега задачата ни е да проверим дали някое от тези 8 числа е нула на полинома. Удобно е това да се направи чрез схемата на Хорнер. Не бива да забравяме и факта, че всяка от получените от нас нули може да бъде евентуално кратна нула. Избираме едно от горните числа, например $x = -2$, и прилагаме схемата на Хорнер.

	3	5	-2	-3	-5	2		нули на $f(x)$
$a = -2$	3	-1	0	-3	1	0	да	$x_1 = -2$

Тъй като остатъкът е нула, следва че $x_1 = -2$ е нула на полинома. Следователно

$$f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = (x + 2)(3x^4 - x^3 - 3x + 1)$$

Ако $x_1 = -2$ е двукратна нула на полинома $f(x)$, то $x + 2$ трябва да дели частното $q(x) = 3x^4 - x^3 - 3x + 1$. За да проверим това, прилагаме пак схемата на Хорнер с $a = -2$ за полинома $q(x)$. Неговите коефициенти са последните получени коефициенти и да напомним, че остатъкът в този ред е нула. Затова продължаваме таблицата с още един ред.

	3	5	-2	-3	-5	2		нули на $f(x)$
$a = -2$	3	-1	0	-3	1	0	да	$x_1 = -2$
$a = -2$	3	-7	14	-31	63		не	

Полученият остатък не е нула. Следователно $x_1 = -2$ не е двукратна нула.

Избираме едно от останалите числа, например $x = 1$, и прилагаме пак схемата на Хорнер. Ако $x = 1$ е нула на полинома $f(x)$, то $x - 1$ трябва да дели $f(x)$ без остатък и тъй като не дели $x + 2$, то трябва да дели без остатък полинома $q(x)$. Затова прилагаме схемата на Хорнер, но за полинома $q(x)$, т.е. при следващите пресмятания работим с последните коефициенти, при които остатъкът е бил нула. В нашата таблица това е последният от редовете, на който пише "да". За избягване на грешки е удобно редът, в който остатъкът не е нула ("не") да се задраска.

	3	5	-2	-3	-5	2		нули на $f(x)$
$a = -2$	3	-1	0	-3	1	0	да	$x_1 = -2$
$a = -2$	3	-7	14	-31	63		не	
$a = 1$	3	2	2	-1	0		да	$x_2 = 1$

Тъй като остатъкът е нула, следва че $x_2 = 1$ е нула на полинома.

Следователно

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = (x + 2)(3x^4 - x^3 - 3x + 1) = \\ &= (x + 2)(x - 1)(3x^3 + 2x^2 + 2x - 1) \end{aligned}$$

Ако $x_2 = 1$ е двукратна нула на полинома $f(x)$, то $x - 1$ трябва да дели новото частно $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$. За да проверим това, прилагаме пак схемата на Хорнер с $a = 1$ за полинома $p(x)$.

	3	5	-2	-3	-5	2		нули на $f(x)$
$a = -2$	3	-1	0	-3	1	0	да	$x_1 = -2$
$a = -2$	3	-7	14	-31	63		не	
$a = 1$	3	2	2	-1	0		да	$x_2 = 1$
$a = 1$	3	5	7	6			не	

Полученият остатък не е нула. Следователно $x_2 = 1$ не е двукратна нула.

Избираме едно от останалите числа, например $x = \frac{2}{3}$, и продължаваме по описания вече начин.

	3	5	-2	-3	-5	2		нули на $f(x)$
$a = -2$	3	-1	0	-3	1	0	да	$x_1 = -2$
$a = -2$	3	-7	14	-31	63		не	
$a = 1$	3	2	2	-1	0		да	$x_2 = 1$
$a = 1$	3	5	7	6			не	
$a = \frac{2}{3}$	3	4	$\frac{14}{3}$	$\frac{19}{9}$			не	

Полученият остатък не е нула. Следователно $x = \frac{2}{3}$ не е нула на полинома.

Избираме едно от останалите числа, например $x = \frac{1}{3}$, и отново прилагаме описаната вече схема.

	3	5	-2	-3	-5	2		нули на $f(x)$
$a = -2$	3	-1	0	-3	1	0	да	$x_1 = -2$
$a = -2$	3	-7	14	-31	63		не	
$a = 1$	3	2	2	-1	0		да	$x_2 = 1$
$a = 1$	3	5	7	6			не	
$a = \frac{2}{3}$	3	4	$\frac{14}{3}$	$\frac{19}{9}$			не	
$a = \frac{1}{3}$	3	3	3	0			да	$x_3 = \frac{1}{3}$

Следователно

$$f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = (x + 2)(3x^4 - x^3 - 3x + 1) =$$

$$\begin{aligned}
&= (x+2)(x-1)(3x^3+2x^2+2x-1) = (x+2)(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2+3x+3) = \\
&= 3(x+2)(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2+x+1)
\end{aligned}$$

Последните две нули на полинома са нули на квадратния тричлен x^2+x+1 .

$$\Rightarrow x_{4,5} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

С това задачата е решена.

Нека

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0$$

е полином с **реални коефициенти**. Тогава, ако $x_0 = a + ib$ е нула на $f(x)$, то и $\bar{x}_0 = a - ib$ е също нула на $f(x)$, при това x_0 и $\bar{x}_0$ имат една и съща кратност.

Ако в разлагането на $f(x)$ обединим множителите с комплексно-спрегнатите нули, то $f(x)$ ще се разложи на линейни множители и квадратни тричлени с реални коефициенти.

Извод: Всеки полином с реални коефициенти може да се разложи на произведение от линейни множители и квадратни тричлени с реални коефициенти.

Разлагане на рационална функция на сума от елементарни дроби.

Функция от вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, където $f(x)$ и $g(x)$ са полиноми, се нарича **рационална функция**. Ако степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя, рационалната функция се нарича **правилна**.

Рационални функции от вида

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad (p^2-4p < 0)$$

се наричат **елементарни дроби** от съответно **първи** и **втори** вид.

Всяка правилна рационална функция (правилна дроб) може да се представи във вида

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{(x-a)^k \dots (x^2+px+q)^m \dots} &= \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)} + \\
&+ \dots + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^m} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \dots + \frac{M_mx+N_m}{x^2+px+q} + \dots
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Последната формула трябва да се разбира по следния начин:

1. Знаменателят $g(x)$ на правилната дроб е разложен на линейни множители и квадратни тричлени на съответни степени.
2. На всеки линеен множител от знаменателя на правилната дроб отговаря сума от толкова елементарни дроби от първи вид, колкото е степента на линейния множител; степените в знаменателите на елементарните дроби намаляват с единица.
3. На всеки квадратен тричлен от знаменателя на правилната дроб отговаря сума от толкова елементарни дроби от втори вид, колкото е степента на квадратния тричлен; степените в знаменателите на елементарните дроби също намаляват с единица.

Пример 2.5 Да се разложи на сума от елементарни дроби функцията:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

Решение:

Дробта е правилна. Тъй като знаменателят е разложен на един линеен множител на втора степен и един квадратен тричлен на първа степен, то дробта се разлага на сума от две елементарни дроби от първи вид и една от втори вид.

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

За да определим неизвестните коефициенти, можем да постъпим по няколко начина:

Първи начин

Привеждаме под общ знаменател и приравняваме числителите (общият знаменател е написан в знаменателя на правилната дроб).

Получаваме

$$x^3 = A(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2 \quad (2.5)$$

или

$$x^3 = (B+C)x^3 + (A-B-2C+D)x^2 + (B+C-2D)x + (A-B+D) \quad (2.6)$$

Приравняваме коефициентите пред съответните степени в равенството (2.6) (виж Теорема 2.1) и получаваме следната система от четири линейни уравнения с четири неизвестни:

$$\begin{cases} B+C & = 1 \\ A-B-2C+D & = 0 \\ B+C-2D & = 0 \\ A-B & + D = 0 \end{cases}$$

Решаваме тази система и получаваме

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2}$$

Следователно

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

Втори начин

По-удобно е обаче (вместо да решаваме система линейни уравнения) коефициентите да се определят, като използваме нулите на знаменателя и ги заместяваме в основното равенство (2.5).

При $x = 1$ получаваме

$$1 = 2A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

При $x = i$ получаваме

$$\begin{aligned} i^3 &= (Ci + D)(i-1)^2 \\ -i &= (Ci + D)(-2i) \\ -i &= 2C - 2Di \end{aligned}$$

Две комплексни числа са равни, ако са равни съответно реалните и имагинерните им части.

Следователно

$$\left| \begin{array}{l} 2C = 0 \\ -2D = -1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2}$$

Заместваме намерените стойности на A , C и D в основното равенство (2.5) и получаваме

$$x^3 = \frac{1}{2}(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 \quad (2.7)$$

Сега при $x = 0$ от (2.7) получаваме $0 = \frac{1}{2} - B + \frac{1}{2}$. Следователно $B = 1$.

Забележка:

При задачи, в които трябва да определяме голям брой неизвестни коефициенти и е сравнително трудно да използваме комплексните корени на квадратните тричлени, можем да комбинираме двата начина. Ако приложим първия начин, ще трябва да решаваме линейна система с много неизвестни. Затова започваме по втория начин и определяме известен брой неизвестни коефициенти. След това ги заместяваме в основното тъждество, разкриваме скобите, приравняваме коефициентите пред равните степени и получаваме линейна система. Тази система е вече с много по-малко неизвестни.

ЗАДАЧИ

2.1 Да се извършат действията:

а) $(x^3 + x^2 - 2x + 1)(x^2 - x - 1) + x^4 - 2x$

б) $\frac{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 1}$

в) $\frac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 8}{x - 1}$

г) Ако $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$ и $g(x) = x + 4$,

намерете $\frac{f(x)}{g(x)}$ и $f(-4)$

д) $\frac{x^7 + 2x^4 - 3x^6 - x^2 + x + 1}{x + 2}$

е) $\frac{x^6 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 112}{x + 2}$

Решение:

а) Умножаваме полиномите в скобите (т.н. разкриване на скоби), правим приве-
дение и получаваме

$$(x^3 + x^2 - 2x + 1)(x^2 - x - 1) + x^4 - 2x = x^5 - x^4 - x^3 + x^4 - x^3 - x^2 - 2x^3 + 2x^2 + 2x + x^2 - x - 1 + x^4 - 2x = x^5 + x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 1$$

б) Делението на полиноми извършваме по познатата ни схема.

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad | \underline{x^2 - 3x + 1} \\ - \\ \underline{2x^4 - 6x^3 + 2x^2} \quad 2x^2 + 3x + 11 = q(x) \\ 3x^3 + 2x^2 - 5x + 6 \\ - \\ \underline{3x^3 - 9x^2 + 3x} \\ 11x^2 - 8x + 6 \\ - \\ \underline{11x^2 - 33x + 11} \\ 25x - 5 = r(x) \end{array}$$

Следователно

$$\frac{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 1} = 2x^2 + 3x + 11 + \frac{25x - 5}{x^2 - 3x + 1}$$

в) Тъй като делим с двучлена $g(x) = x - 1$, ще приложим схемата на Хорнер с $a = 1$.

	1	-3	4	-6	8
$a = 1$	1	-2	2	-4	$4 = r$

Следователно

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 8}{x - 1} = x^3 - 2x^2 + 2x - 4 + \frac{4}{x - 1}$$

г) Тъй като делим с двучлена $g(x) = x + 4$, ще приложим отново схемата на Хорнер с $a = -4$ и теоремата на Безу.

	1	-3	6	-10	16
$a = -4$	1	-7	34	-146	$600 = r = f(-4)$

Следователно

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16}{x + 4} = x^3 - 7x^2 + 34x - 146 + \frac{600}{x + 4}$$

д) Тъй като полиномът, който делим, не е подреден по намаляващите степени на променливата, то в схемата на Хорнер ще подредим коефициентите и където липсва степен на x , пишем нула.

	1	-3	0	2	0	-1	1	1
$a = -2$	1	-5	10	-18	36	-73	147	-293

Следователно

$$\frac{x^7 - 3x^6 + 2x^4 - x^2 + x + 1}{x + 2} = x^6 - 5x^5 + 10x^4 - 18x^3 + 36x^2 - 73x + 147 - \frac{293}{x + 2}$$

е) Прилагаме схемата на Хорнер, като на мястото на липсващите степени на x пишем нули.

	1	0	7	16	8	-16	-112
$a = -2$	1	-2	11	-6	20	-56	0

Следователно

$$x^6 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 112 = (x + 2)(x^5 - 2x^4 + 11x^3 - 6x^2 + 20x - 56)$$

2.2 Определете дали числото a е нула на полинома $f(x)$ и от каква кратност.

а) $f(x) = x^6 - x^5 - 11x^4 + 13x^3 + 26x^2 - 20x - 24$ $a = -1$

б) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ $a = 2$

Решение:

а) Прилагаме схемата на Хорнер, докато получим остатък, различен от нула.

	1	-1	-11	13	26	-20	-24
$a = -1$	1	-2	-9	22	4	-24	0
$a = -1$	1	-3	-6	28	-24	0	
$a = -1$	1	-4	-2	30	-54		

Следователно числото $a = -1$ е двукратна нула на полинома и

$$x^6 - x^5 - 11x^4 + 13x^3 + 26x^2 - 20x - 24 = (x + 1)^2(x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24)$$

б) Аналогично

	1	-5	7	-2	4	-8
$a = 2$	1	-3	1	0	4	0
$a = 2$	1	-1	-1	-2	0	
$a = 2$	1	1	1	0		
$a = 2$	1	3	7			

Следователно числото $a = 2$ е трикратна нула на полинома и

$$x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x - 2)^3(x^2 + x + 1)$$

2.3 Решете уравненията:

а) $2x^3 + 5x^2 - 23x + 10 = 0$

б) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$

Решение:

а) При решаването на тази задача ще следваме пример 2.4.

$$p \text{ дели } 10 \implies p = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$$

$$q \text{ дели } 2 \implies q = \pm 1, \pm 2$$

$$\implies x = \frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}$$

Избираме числата $2, -5, \frac{1}{2}$ и използваме схемата на Хорнер.

	2	5	-23	10	корен
$a = 2$	2	9	-5	0	$x_1 = 2$
$a = 2$	2	13	21		не
$a = -5$	2	-1	0		$x_2 = -5$
$a = \frac{1}{2}$	2	0			$x_3 = \frac{1}{2}$

От таблицата се вижда, че $x_1 = 2$ не е двоен корен и затова при проверката със следващото число -5 пресмятанията извършваме с последния, преди това получен ред, на който остатъкът е нула.

б) Аналогично

$$\begin{aligned} p \text{ дели } 9 &\implies p = \pm 1, \pm 3, \pm 9 \\ q \text{ дели } 1 &\implies q = \pm 1 \\ \implies x = \frac{p}{q} &= \pm 1, \pm 3, \pm 9 \end{aligned}$$

Забелязваме, че ако старшият коефициент е единица, то възможните рационални корени са цели. Избираме числото 1 и използваме схемата на Хорнер.

	1	4	-2	-12	9	корен
$a = 1$	1	5	3	-9	0	$x_1 = 1$
$a = 1$	1	6	9	0		$x_2 = 1$

От таблицата се вижда, че числото едно е двукратен корен и че уравнението може да се представи по следния начин

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 &= (x - 1)^2(x^2 + 6x + 9) = 0 \\ x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 &= (x - 1)^2(x + 3)^2 = 0 \end{aligned}$$

Следователно $x_{3,4} = -3$.

2.4 Разложете на линейни множители полиномите:

а) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

б) $x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 5x^2 + 20x - 12$

Решение:

а) Ако намерим нулите на даден полином, лесно ще го разложим на множители. Тъй като коефициентите са цели числа, можем да приложим теорема 2.5.

$$\begin{aligned} p \text{ дели } 6 &\implies p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6 \\ q \text{ дели } 1 &\implies q = \pm 1 \\ \implies x = \frac{p}{q} &= \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6 \end{aligned}$$

	1	-6	11	-6	нули на полинома
$a = 1$	1	-5	6	0	$x_1 = 1$

От таблицата се вижда, че числото $x_1 = 1$ е нула на полинома.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

Корените на квадратния тричлен $x^2 - 5x + 6$ са $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

б) Аналогично

$$\begin{aligned} p \text{ дели } 12 &\implies p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12 \\ q \text{ дели } 1 &\implies q = \pm 1 \\ \implies x = \frac{p}{q} &= \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12 \end{aligned}$$

	1	4	-2	-16	5	20	-12	нули на полинома
$a = 1$	1	5	3	-13	-8	12	0	$x_1 = 1$
$a = 1$	1	6	9	-4	-12	0		$x_2 = 1$
$a = 1$	1	7	16	12	0			$x_3 = 1$
$a = 1$	1	8	24	36				не
$a = -3$	1	4	4	0				$x_4 = -3$

Следователно

$$x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 5x^2 + 20x - 12 = (x - 1)^3(x + 3)(x^2 + 4x + 4)$$

$$x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 5x^2 + 20x - 12 = (x - 1)^3(x + 3)(x + 2)^2$$

2.5 Да се разложат на елементарни дробни функциите:

а) $\frac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}$

б) $\frac{9 - 7x}{x(x + 1)(x - 3)^2}$

в) $\frac{x^2}{x^4 - 16}$

Решение:

а) Дробта е правилна. Тъй като знаменателят е разложен на три линейни множителя, то дробта се разлага на сума от три елементарни дробни от първи вид.

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 4}$$

Привеждаме под общ знаменател и приравняваме числителите.

Получаваме

$$x^2 + 2x + 6 = A(x - 2)(x - 4) + B(x - 1)(x - 4) + C(x - 1)(x - 2) \quad (2.8)$$

От равенството (2.8) при $x = 1$ получаваме $9 = 3A \implies A = 3$.

При $x = 2$ получаваме $14 = -2B \implies B = -7$.

При $x = 4$ получаваме $30 = 6C \implies C = 5$.

Следователно

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)} = \frac{3}{x - 1} - \frac{7}{x - 2} + \frac{5}{x - 4}.$$

б) Аналогично

$$\frac{9 - 7x}{x(x + 1)(x - 3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x - 3)^2} + \frac{D}{x - 3}$$

Привеждаме под общ знаменател и приравняваме числителите. Получаваме

$$9 - 7x = A(x + 1)(x - 3)^2 + Bx(x - 3)^2 + Cx(x + 1) + Dx(x + 1)(x - 3) \quad (2.9)$$

От равенството (2.9) при $x = 0$ получаваме $9 = 9A \implies A = 1$.
 При $x = -1$ получаваме $16 = -16B \implies B = -1$.
 При $x = 3$ получаваме $-12 = 12C \implies C = -1$.

Заместваме намерените стойности на A , B и C в основното равенство (2.9) и получаваме

$$9 - 7x = (x + 1)(x - 3)^2 - x(x - 3)^2 - x(x + 1) + Dx(x + 1)(x - 3) \quad (2.10)$$

От равенството (2.10) при $x = 1$ получаваме $D = 0$. Следователно

$$\frac{9 - 7x}{x(x + 1)(x - 3)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{(x - 3)^2}.$$

в) Първо разлагаме знаменателя на множители.

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

Следователно

$$\frac{x^2}{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Привеждаме под общ знаменател и приравняваме числителите. Получаваме

$$x^2 = A(x + 2)(x^2 + 4) + B(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x - 2)(x + 2) \quad (2.11)$$

От равенството (2.11) при $x = 2$ получаваме $4 = 32A \implies A = \frac{1}{8}$.

При $x = -2$ получаваме $4 = -32B \implies B = -\frac{1}{8}$.

Заместваме намерените стойности на A и B в основното равенство (2.11) и получаваме

$$x^2 = \frac{1}{8}(x + 2)(x^2 + 4) - \frac{1}{8}(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x - 2)(x + 2) \quad (2.12)$$

Сега при $x = 0$ получаваме $0 = 1 + 1 - 4D \implies D = \frac{1}{2}$.

Заместваме намерените стойности на A , B и D в основното равенство (2.12) и получаваме

$$x^2 = \frac{1}{8}(x + 2)(x^2 + 4) - \frac{1}{8}(x - 2)(x^2 + 4) + (Cx + \frac{1}{2})(x - 2)(x + 2) \quad (2.13)$$

Сега при $x = 1$ получаваме $C = 0$. Следователно

$$\frac{x^2}{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)} = \frac{1}{8(x - 2)} - \frac{1}{8(x + 2)} + \frac{1}{2(x^2 + 4)}.$$

Задачи за самостоятелна работа:**2.6** Да се извършат действията:

$$\text{a)} \quad \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1} \quad \text{отг.} \quad x^2 - x - 1 + \frac{2 - 5x}{x^2 - x + 1}$$

$$\text{б)} \quad \frac{x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 3}{x - 1} \quad \text{отг.} \quad x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2 + \frac{5}{x - 1}$$

$$\text{в)} \quad \frac{x^6 - 8x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 18}{x - 3} \quad \text{отг.} \quad x^5 + 3x^4 + x^3 - 2x - 6$$

2.7 Решете уравненията:

$$\text{a)} \quad x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0 \quad \text{отг.} \quad x_1 = 2 \quad x_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{3}$$

$$\text{б)} \quad 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1 = 0 \quad \text{отг.} \quad x_{1,2} = -\frac{1}{2} \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{в)} \quad 6x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \text{отг.} \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{г)} \quad 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 2 = 0 \quad \text{отг.} \quad \text{няма рационални корени}$$

2.8 Разложете на линейни множители полиномите:

$$\text{a)} \quad x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8 \quad \text{отг.} \quad (x - 1)(x - 2)(x - 2i)(x + 2i)$$

$$\text{б)} \quad x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad \text{отг.} \quad (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x - i)(x + i)$$

2.9 Да се разложат на сума от елементарни дроби функциите:

$$\text{a)} \quad \frac{x + 4}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} \quad \text{отг.} \quad \frac{3}{2(x + 1)} - \frac{2}{x + 2} + \frac{1}{2(x + 3)}$$

$$\text{б)} \quad \frac{5x - 14}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \quad \text{отг.} \quad \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{x + 2}$$

$$\text{в)} \quad \frac{1}{x^3 - 1} \quad \text{отг.} \quad \frac{1}{3(x - 1)} - \frac{x + 2}{3(x^2 + x + 1)}$$

Глава 3

Матрици и детерминанти

Целта на тази глава е да запознае читателя с понятията матрица и детерминанта, действията с матрици, пресмятане на детерминанти и с понятието обратна матрица. След усвояване на материала вие ще умееете: да извършвате действията с матрици; да пресмятате детерминанти от втори, трети ред и по-висок ред, като използвате съответните дефиниции или прилагате целенасочено подходящи свойства на детерминантите; да намирате обратна матрица; да решавате матрични уравнения.

МАТРИЦИ

Матрица се нарича множество от $m \cdot n$ на брой числа, подредени в правоъгълна таблица от m реда и n стълба.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числата a_{ij} се наричат *елементи* на матрицата. Две матрици се наричат **еднотипни**, ако имат съответно равен брой редове и стълбове. **Две матрици са равни**, ако са еднотипни и съответните им елементи са равни.

При $m = n$ матрицата A се нарича **квадратна матрица** от n -ти ред. Елементите $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ образуват **главния диагонал** на матрицата. Матрица, която има само един ред се нарича **вектор-ред**, а имаща само един стълб **вектор-стълб**. Под **диагонална матрица** се разбира квадратна матрица, чиито елементи извън главния диагонал са нули. Диагонална матрица, на която елементите по главния диагонал са равни се нарича **скаларна матрица**. Скаларна матрица с диагонални елементи равни на единица се нарича **единична матрица** и се бележи с E . Матрица, на която всички елементи са равни на нула ще наричаме **нулева матрица**.

Сума на две еднотипни матрици

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича матрицата

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Произведение на матрицата A с числото λ се нарича матрицата, на която всички елементи са умножени с λ , т.е.

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Нека A е $m \times n$ матрица, а B е $n \times p$ матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Произведение на матрицата A с матрицата B се нарича матрицата C с m реда и p стълба

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$$\text{с елементи } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Пример 3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 4 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Произведението на две матрици $A \cdot B$ е дефинирано само тогава, когато броят на стълбовете на първата матрица A е равен на броя на редовете на втората матрица B . Елементите на произведението на две матрици се получават като се умножават редовете на първата матрица със стълбовете на втората.

От следващия пример се вижда, че **комутативният закон не е в сила** при умножението на две матрици, т.е. в общия случай $AB \neq BA$.

Пример 3.2

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 22 & 5 \end{pmatrix}$$

Лесно може да се провери, че скаларните матрици комутират с всяка матрица от същия ред. Единичната матрица е наречена така, защото $E.X = X.E = X$ за всяка матрица X от n -ти ред, т.е. матрицата E играе ролята на числото едно при умножение на матрици.

Нека A е квадратна матрица от ред n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицата

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

редовете на която са стълбовете на A , се нарича **транспонирана** на A .

В сила са следните правила за транспониране:

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (\lambda.A)^T = \lambda.A^T, \quad (A.B)^T = B^T.A^T$$

За действията с матрици са в сила следните свойства, при условие че означените операции са изпълними. За квадратните матрици от един и същи ред те винаги са в сила.

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
6. $(AB)C = A(BC)$
7. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
8. $A(B + C) = AB + AC$
9. $(A + B)C = AC + BC$

ЗАДАЧИ

3.1. Ако $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, да се праметне

$4A - 3B$.

Решение:

$$\begin{aligned} 4A - 3B &= 4 \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 24 & -4 \\ 0 & -8 & -20 \\ -12 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ -6 & 6 & 9 \\ 12 & -3 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 24 & -16 \\ 6 & -14 & -29 \\ -24 & 7 & 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2. Умножете матриците

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 15 & -1 \\ 1 & 8 & -2 \\ 6 & 15 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 18 & 30 \\ -5 & 8 & 13 \\ 12 & 29 & 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.3. Ако $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, пресметнете $A \cdot A^T$.

Решение: Имаме

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогава

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 27 \\ 27 & 27 \end{pmatrix}$$

3.4. Ако $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, да се намери $(A+B)^2 - 2B.A$

Решение: Имаме

$$A+B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогава

$$\begin{aligned} (A+B)^2 - 2BA &= \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 3 & -14 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -4 & -12 & 2 \\ -9 & -13 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 28 & 0 \\ 15 & 29 & -8 \\ -7 & -16 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Задачи за самостоятелна работа

3.5 Ако $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \\ -6 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, да се намерят:

а) $6A + B$ б) $3(3A + B)$

Отг. а) $\begin{pmatrix} 7 & 36 & -2 \\ 2 & -10 & -27 \\ -24 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 12 & 54 & 3 \\ 6 & -12 & -45 \\ -45 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

3.6 Умножете матриците

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Отг. а) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.7 Ако $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, пресметнете $A^T.A$

Отг. $\begin{pmatrix} 20 & 14 & 6 & 6 \\ 14 & 10 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

ДЕТЕРМИНАНТИ

I. Основни дефиниции

Нека A е квадратна матрица от втори ред $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Детерминанта от втори ред, съответстваща на матрицата A , се нарича числото

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример 3.3 $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 - 4 \cdot (-5) = -2 + 20 = 20 - 2 = 18$

Аналогично, ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ е квадратна матрица от трети ред,

то съответстващата и **детерминанта от трети ред** е числото

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 3.4 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= 3(14 - 2) - 4(2 + 4) - 5(-1 - 14) = 36 - 24 + 75 = 111 - 24 = 87$$

II. Пресмятане на детерминанти от n -ти ред

Нека Δ е детерминанта от ред n

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

а Δ_{ij} е детерминантата от ред $n - 1$, която се получава от Δ чрез премахване на i -тия ред и j -тия стълб. Детерминантата Δ_{ij} се нарича **поддетерминанта** на Δ , съответстваща на елемента a_{ij}

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Алгебрично допълнение (адюнгирано количество) на елемента a_{ij} наричаме числото

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Нека i е номерът на произволен ред на детерминантата Δ .

Дефиниция: $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}$

Горната дефиниция ни казва, че ако умножим елементите на даден ред със съответните им адюнгирани количества и получените произведения съберем, то резултатът е стойността на детерминантата. (*Кой ред е използван при пресмятането на детерминантите от втори и трети ред ?*)

III. Свойства на детерминантите

1. Ако разместим два реда на детерминантата помежду им, детерминантата променя само своя знак.

2. Детерминанта, която съдържа два еднакви реда е равна на нула.

Доказателство: Да означим детерминантата с Δ , а детерминантата, получена след размяната на двата еднакви реда, с Δ_1 . Тъй като двата реда са еднакви, то $\Delta_1 = \Delta$, а от свойство 1 следва, че $\Delta_1 = -\Delta$. Следователно $\Delta = -\Delta$, $\Rightarrow 2\Delta = 0$, $\Rightarrow \Delta = 0$.

3. Ако умножим елементите на даден ред с адюнгираните количества на съответните елементи на друг ред и ги съберем, ще получим нула, т.е.

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{lk} = a_{i1}A_{l1} + a_{i2}A_{l2} + \dots + a_{ij}A_{lj} + \dots + a_{in}A_{ln} = 0, \text{ при } l \neq i.$$

4. Ако елементите от един ред на детерминантата имат общ множител, той може да се изнесе пред детерминантата

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \Delta$$

Доказателство: $\Delta_1 = \sum_{k=1}^n (\lambda \cdot a_{ik}) A_{ik} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \lambda \cdot \Delta$.

5. Детерминанта, която има нулев ред, е равна на нула.

Доказателство: Следва от свойство 4 при $\lambda = 0$.

6. Детерминанта, съдържаща два пропорционални реда е равна на нула.

Доказателство: Следва от свойство 4 и свойство 2.

7. Ако елементите на i -тия ред на детерминанта са суми от по две събираеми $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2$$

Доказателство: $\Delta = \sum_{k=1}^n (b_{ik} + c_{ik})A_{ik} = \sum_{k=1}^n b_{ik}A_{ik} + \sum_{k=1}^n c_{ik}A_{ik} = \Delta_1 + \Delta_2$.

Забележка: Очевидно е, че свойство 7 е в сила за краен брой събираеми.

Казваме, че i -тия ред на една детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

е **линейна комбинация** на останалите редове, когато съществуват числа

$$c_1, c_2, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n,$$

такива че за $j = 1, 2, \dots, n$ е изпълнено

$$a_{ij} = c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j} + \dots + c_{i-1} a_{i-1,j} + c_{i+1} a_{i+1,j} + \dots + c_n a_{nj}$$

8. Ако един от редовете на детерминанта е линейна комбинация на останалите редове, то детерминанта е равна на нула.

Доказателство: Прилагаме свойство 7 (забележката) и свойство 6.

9. Детерминанта не се променя, ако към елементите на един ред се прибавят съответните елементи на друг ред, умножени с едно и също число.

Доказателство: Нека елементите на i -тия ред са умножени с числото λ и са прибавени към j -тия ред. Пресмятаме новата детерминанта Δ_1 , като развиваме точно по този новополучен ред и прилагаме свойство 7. Получаваме: $\Delta_1 = \sum_{k=1}^n (a_{jk} + \lambda a_{ik})A_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk}A_{jk} + \sum_{k=1}^n (\lambda a_{ik})A_{jk} = \Delta + 0 = \Delta$ (втората детерминанта е равна на нула, тъй като има да пропорционални реда).

10. $\det A = \det A^T$

Следствие: Свойствата 1–9 са в сила и при съответната формулировка за стълбовете на детерминантите.

Пример 3.5

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

(развиваме по елементите на първия ред)

$$\begin{aligned} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 7 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9. \end{aligned}$$

Детерминанта, за която всички елементи от едната страна на главния диагонал са нули, се нарича **триъгълна**. Стойността на триъгълна детерминанта е равна на произведението на числата по главния диагонал.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Пример 3.6

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{(първия ред, умножен по } (-1), \\ \text{прибавяме към всеки} \\ \text{от останалите редове)} \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-6) \cdot (-5) = 60. \end{aligned}$$

Пример 3.7 (Детерминанта на Вандермонд)

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

В сила е равенството

$$W_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) = (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdot (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \cdot \dots \cdot (x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1})$$

Следователно $W_n \neq 0$ тогава и само тогава, когато числата x_i ($i = 1, \dots, n$) са различни.

ЗАДАЧИ

3.8 Пресметнете детерминантите

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{2} & 3 - \sqrt{5} \\ 3 + \sqrt{5} & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\text{а) } \Delta = 5 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 20 + 3 = 23$$

$$\text{б) } \Delta = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) - (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = (1 - 2) - (9 - 5) = -1 - 4 = -5$$

3.9 Пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = \\ &= -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

Пресмятането на детерминанти от по-висок ред става чрез използване на основните свойства и свеждане до детерминанти от по-нисък ред. Това може да става по различни начини. В този смисъл, следващите решения не са единствено възможните.

3.10 Пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 15 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 15 \end{vmatrix} =$$

Първия ред, умножен по (-1) , прибавяме към всеки от останалите редове.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 14 \end{vmatrix} =$$

Втория ред, умножен по (-2) и по (-3) , прибавяме съответно към третия и четвъртия ред.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

Третия ред, умножен по (-2) , прибавяме към четвъртия.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

3.11 Пресметнете детерминантите

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 & 8 & 20 \\ 5 & 2 & 12 & 32 & 100 \\ 5 & 4 & 36 & 128 & 500 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 20 \\ 5 & 4 & 12 & 32 & 100 \end{vmatrix}.$$

Решение:

а)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

Първия ред, умножен по (-1) , прибавяме към всеки от останалите редове.

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

Развиваме по елементите на втория стълб.

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

Първата детерминанта е триъгълна. Първия стълб на втората детерминанта умножаваме по 3 и прибавяме към последния стълб, след което развиваме по елементите на последния ред.

$$= 240 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & 4 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 5 & -6 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 240 + 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 4 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 240 + 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -46 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 240 + 6 \cdot 254 = 1764.$$

б)

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 & 8 & 20 \\ 5 & 2 & 12 & 32 & 100 \\ 5 & 4 & 36 & 128 & 500 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 20 \\ 5 & 4 & 12 & 32 & 100 \end{vmatrix} =$$

Изнасяме от всеки от стълбовете общите множители.

$$= 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 20 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

Изваждаме първия ред от всеки от останалите редове.

$$= 3200 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 15 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

Развиваме по елементите на първи стълб.

$$= 3200 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 15 & 24 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

Развиваме по елементите на трети ред.

$$= 3200 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 15 & 24 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3200 \cdot 0 = 0,$$

защото детерминанта с два еднакви реда е равна на нула.

3.12 Решете уравнението

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

(Прибавяме първия ред на детерминантата към втория и след това развиваме по

елементите на първия стълб)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

(Развиваме по елементите на последния стълб)

$$= x \cdot \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^2 \cdot \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2(x^2 - x - 2) = x^4 - x^3 - 2x^2$$

Следователно уравнението, което трябва да решим е $x^2(x^2 - x - 2) = 0$ и корените му са $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$.

Задачи за самостоятелна работа

3.13 Пресметнете детерминантите

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{б)} \begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ -\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \end{vmatrix} \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Отг. а) 12; б) 1; в) 60

3.14 Пресметнете детерминантите

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a+bi & -b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix} \quad \text{б)} \begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3-x^2 & x^2+1 \end{vmatrix} \quad \text{г)} \begin{vmatrix} \cotg^2 x & \tg^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{vmatrix}$$

Отг. а) $(a+b)^2$; б) 0; в) $x-1$; г) $\cos 2x$

3.15 Пресметнете детерминантите

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 16 \end{vmatrix} \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 4 & 11 & 8 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -1 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Отг. а) 12; б) 360 в) 2

3.16 Пресметнете детерминантите

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & a & -x \\ -a & 1 & x \\ x & -x & 1 \end{vmatrix}$$

Отг. а) $2a^2(x+a)$; б) $1+a^2+2x^2$

3.17 Пресметнете детерминантите

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Отг. а) -1 ; б) 12 ; в) -105 г) -10

3.18 Пресметнете детерминантите

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix}$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Отг. а) $x^5 - 6x^3 + 8x$; б) 56

3.19 Да се решат уравненията:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -15 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Отг. а) $x_1 = -1$, $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

б) $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -5$, $x_4 = 3$

ОБРАТНА МАТРИЦА

Дефиниция 3.1 Матрицата A^{-1} се нарича **обратна матрица** на квадратната матрица A , ако

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = E.$$

Дефиниция 3.2 Квадратната матрица A се нарича **особена**, ако нейната детерминанта е равна на нула и **неособена** в противен случай.

Теорема 3.1 *Необходимо и достатъчно условие една квадратна матрица да има обратна е тя да бъде неособена.*

Доказателство: 1. Нека матрицата A има обратна. Ще докажем, че A е неособена, като използваме следния факт: ако A и B са две квадратни матрици и $A.B = C$, то е в сила равенството $\det A \cdot \det B = \det C$.

От това, че матрицата A има обратна следва, че е изпълнено дефиниционното равенство $A.A^{-1} = A^{-1}.A = E$. Следователно $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. Тогава следва, че $\det A \neq 0$, т.е. A е неособена.

2. Нека сега матрицата A е неособена, т.е. $\det A \neq 0$. Ще докажем, че

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

където A_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij} в детерминантата $\det A$.

Наистина

$$\begin{aligned} A.A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = E, \end{aligned}$$

като при умножението на двете матрици съществено използвахме дефиницията и 3-то свойство от раздел “Детерминанти“. Аналогично се проверява и равенството $A^{-1}.A = E$. ■

Пример 3.8 Да се намери обратната матрица на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$A_{11} = 8, \quad A_{12} = -3, \quad A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Пример 3.9 Да се намери обратната матрица на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

Пресмятаме детерминантата

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Понеже $\det A \neq 0$, матрицата A е неособена и следователно съществува обратната матрица A^{-1} .

Пресмятаме адюнгираните количества

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Следователно

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & -0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

МАТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

Като използваме обратна матрица, можем да решаваме матрични уравнения от вида

$$AX = B,$$

където A е квадратна неособена матрица от ред m , а B е произволна правоъгълна матрица от тип $m \times n$. Неизвестната матрица X е

$$X = A^{-1}B.$$

Аналогично, решението на матричното уравнение

$$XA = B$$

е

$$X = BA^{-1},$$

при условие, че матрицата A^{-1} съществува.

Обърнете внимание:

Тъй като комутативният закон не е в сила при умножение на матрици, то в горните формули е съществено от коя страна в произведението е матрицата A^{-1} и от коя матрицата B , т.е. дали умножаваме с обратната матрица отляво или отляво.

От горните два случая следва, че решението на матричното уравнение

$$AXB = C$$

е

$$X = A^{-1}CB^{-1},$$

при условие, че матриците A^{-1} и B^{-1} съществуват.

Пример 3.10 Да се реши матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Означаваме съответно $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пресмятаме

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Понеже $\det A \neq 0$, матрицата A е неособена и следователно съществува обратната матрица A^{-1} .

Получаваме

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 38 & -41 & 34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

Тогава

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 38 & -41 & 34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 85 & 124 \\ 60 & 88 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.11 Да се реши матричното уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

Нека

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пресмятаме

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

За обратната матрица получаваме:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Следователно } X &= B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 16 & -4 & -8 \\ 10 & -8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 & -1.5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2.5 & -2 & -2.5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

3.20 Съществуват ли обратни матрици на матриците?

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & -8 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: а) Пресмятаме

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Умножаваме втория стълб по 2 и прибавяме към първия и третия стълб, след това събираме същия стълб с четвъртия и накрая развиваме по елементите на четвъртия ред.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 10 & 5 & 12 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 10 & 12 & 8 \end{vmatrix} = -374 \neq 0$$

Матрицата A е неособена и следователно съществува A^{-1} .

б) Пресмятаме

$$\det B = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & -8 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Втория стълб, умножен съответно по 1 и 2 прибавяме към първия и третия стълб, след което развиваме по елементите на четвъртия ред.

$$= \begin{vmatrix} -4 & 2 & 7 & 7 \\ -4 & -8 & -11 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -4 & 7 & 7 \\ -4 & -11 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 9 & 2 \\ 0 & -9 & -2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -4 \cdot 0 = 0.$$

Матрицата B е особена, следователно не съществува B^{-1} .

3.21 Намерете обратната матрица на всяка от следните матрици:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: а) Нека $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \neq 0$$

$$A_{11} = 5; \quad A_{12} = -1; \quad A_{21} = -9; \quad A_{22} = 2$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

б) Нека

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Първия ред, умножен по (-1) , прибавяме към втория.

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Пресмятаме адюнгираните количества:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{14} = - \begin{vmatrix} 1 & -5 & -6 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -5 & -6 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{34} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & -5 & -6 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{41} = - \begin{vmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -5 & -6 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{43} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & -5 & -6 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Следователно

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

3.22 Да се решат матричните уравнения

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & 11 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Решение: а) Нека } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 4 & 10 & 7 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

и

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 4 & 10 & 7 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 16 & 24 & 0 \\ 36 & -2 & 20 \\ 28 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

б) Нека $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & 11 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Тогава

$$A^{-1} = \frac{1}{365} \begin{pmatrix} 222 & 211 & 96 & -70 \\ -53 & -29 & 56 & 20 \\ 68 & -11 & 59 & -5 \\ 78 & 84 & 14 & 5 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \frac{1}{365} \begin{pmatrix} 222 & 211 & 96 & -70 \\ -53 & -29 & 56 & 20 \\ 68 & -11 & 59 & -5 \\ 78 & 84 & 14 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{365} \begin{pmatrix} -100 & -431 \\ 185 & 509 \\ 45 & 256 \\ -45 & -329 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задачи за самостоятелна работа

3.23 Имат ли обратна матрица следните матрици?

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 1 \\ -1 & 3 & 12 \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

Отг. а) да; б) не

3.24 Намерете обратните матрици на матриците

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 11 & 5 & 53 \\ 4 & 2 & 15 \\ 6 & 3 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Отг. а)} \begin{pmatrix} -16 & -6 & 9 \\ 18 & 7 & -10 \\ -11 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 44 & -31 \\ -2 & -65 & 47 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{в)} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -6 \\ 10 & -5 & -15 \end{pmatrix} \quad \text{г)} \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -6 & 13 & -5 \\ -14 & 23 & -8 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3.25 Да се решат матричните уравнения

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -44 & 16 \\ 42 & -7 & 56 \\ 12 & 26 & -10 \\ 18 & 16 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\text{Отг. а)} \begin{pmatrix} 67 & -49 \\ 165 & -121 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -6 & 6 & -2 \\ 9 & -9 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Глава 4

Ранг на матрица

Целта на тази глава е да запознае читателя с понятията линейна зависимост и линейна независимост на система вектори и ранг на матрица. След усвояване на материала вие ще умееете да намирате ранг на матрица.

Нека

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

е множество (система) от вектор-стълбове. За краткост вместо вектор-стълбове ще казваме само вектори.

Дефиниция 4.1 *Ще казваме, че системата вектори (4.1) е **линейно независима**, ако само нулевата линейна комбинация на векторите е равна на нулевия вектор. В противен случай системата (4.1) се нарича **линейно зависима**.*

Основна роля в дефиницията играе равенството

$$c_1.A_1 + c_2.A_2 + c_3.A_3 + \dots + c_n.A_n = \mathbf{0}, \quad (4.2)$$

където $c_1, c_2, \dots, c_n$ са константи, а $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$. Ако равенство (4.2) е възможно само за $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, то системата вектори е линейно независима. Ако поне едно от числата $c_1, c_2, \dots, c_n$ е различно от нула, тогава системата вектори е линейно зависима.

Теорема 4.1 *Една система вектори е линейно зависима тогава и само тогава, когато поне един от векторите се изразява като линейна комбинация на останалите.*

Доказателство:

1. Нека системата вектори е линейно зависима. От дефиницията следва, че е изпълнено $c_1.A_1 + c_2.A_2 + c_3.A_3 + \dots + c_n.A_n = \mathbf{0}$, като поне един от коефициентите е различен от нула. Нека c_1 е такъв коефициент. Тогава:

$$A_1 = -\left(\frac{c_2}{c_1}\right).A_2 - \left(\frac{c_3}{c_1}\right).A_3 - \dots - \left(\frac{c_n}{c_1}\right).A_n,$$

което означава, че векторът A_1 се изразява като линейна комбинация на останалите.

2. Обратното е очевидно, защото ако $A_1 = \lambda_2.A_2 + \lambda_3.A_3 + \dots + \lambda_n.A_n$, то получаваме равенството $(-1).A_1 + \lambda_2.A_2 + \lambda_3.A_3 + \dots + \lambda_n.A_n = \mathbf{0}$, което показва, че системата е линейно зависима. ■

Следствие 4.1 *Ако една система вектори е линейно независима, то никой от векторите не може да се изрази като линейна комбинация на останалите.*

Теорема 4.2 (Достатъчни условия за линейна зависимост)

1. Ако една системата вектори съдържа нулевия вектор, тя е линейно зависима.
2. Ако една подсистема на дадена система вектори е линейно зависима, то цялата система е линейно зависима.

Доказателство:

1. Очевидно е, че $0.A_1 + 0.A_2 + 0.A_3 + \dots + 0.A_n + 1.\mathbf{0} = \mathbf{0}$ и тъй като един от коефициентите е единица (различен от нула), то системата вектори е линейно зависима.

2. Нека подсистемата $A_1, A_2, \dots, A_k$ е линейно зависима. Това означава, че е изпълнено равенството $c_1.A_1 + c_2.A_2 + \dots + c_k.A_k = \mathbf{0}$ и поне един от коефициентите е различен от нула. Като прибавим към лявата страна на това равенство останалите вектори, умножени с нула, ще получим $c_1.A_1 + c_2.A_2 + \dots + c_k.A_k + 0.A_{k+1} + \dots + 0.A_n = \mathbf{0}$, което показва че цялата система е линейно зависима. ■

Следствие 4.2 *Всяка подсистема на линейно независима система вектори е линейно независима.*

Дефиниция 4.2 *Множество от максимален брой линейно независими вектори на дадена система вектори наричаме **базис** на системата.*

Теорема 4.3 *Системата вектори*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

е линейно независима.

Доказателство: От равенството

$$c_1.E_1 + c_2.E_2 + \dots + c_m.E_m = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T = (0, 0, \dots, 0)^T$$

следва, че $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$, т.е. системата вектори е линейно независима. ■

Нека в матрицата A с m реда и n стълба са избрани k реда и k стълба ($k \leq \min(m, n)$). Елементите, в които тези редове и стълбове се пресичат, образуват квадратна матрица от ред k , детерминантата на която се нарича **минор** от k -ти ред, принадлежащ на матрицата A .

Дефиниция 4.3 *Под ранг на матрица се разбира най-високият от редовете на различните от нула минори.*

За ранг на нулевата матрица се приема числото нула. Рангът на матрицата A означаваме с $r(A)$. Очевидно е, че ако всички минори от ред k на дадена матрица са равни на нула, то рангът на тази матрица е по-малък от k .

Пример 4.1 Матрицата $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -7 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ има ранг $r = 2$.

Наистина минорът от ред 2 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$,

а всички минори от ред 3 са равни на нула

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -7 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Между ранга на дадена матрица и броя на нейните линейно независими вектор-стълбове има следната зависимост:

Теорема 4.4 *Ако рангът на една матрица е равен на r , то съществуват r на брой линейно независими вектор-стълбове и всички останали се изразяват като тяхна линейна комбинация.*

Следствие 4.3 *Ако рангът на една матрица е равен на r , то съществуват r на брой линейно независими вектор-редове и всички останали се изразяват линейно чрез тях.*

Доказателство: Прилагаме Теорема 4.4 за транспонираната матрица и съобразяваме, че стойността на D няма да се промени при транспонирането. ■

Следствие 4.4 *Максималният брой линейно независими стълбове на матрицата е равен на максималния брой линейно независими редове и това е ранга на матрицата.*

От раздел “Детерминанти” знаем, че ако някой ред (стълб) на дадена детерминанта е линейна комбинация на останалите, то стойността и е равна на нула. Сега ще докажем, че е в сила и обратното твърдение.

Теорема 4.5 *Ако една детерминанта е равна на нула, то някой от нейните редове (стълбове) е линейна комбинация на останалите.*

Доказателство: Нека A е квадратна матрица от ред n . Щом $\det A = 0$, то $r(A) \leq n - 1$. Следователно поне един ред и стълб на матрицата не принадлежат на минора от най-висок ред, който е различен от нула. Остава само да приложим теорема 4.4 и следствие 4.3. ■

Пресмятането на ранга на една матрица чрез използване само на дефиницията не е ефективно, защото води до пресмятането на голям брой минори. Ето защо рангът на една матрица се пресмята, като се използват елементарни преобразования и теорема 4.4.

Елементарни преобразования на матрица се наричат следните преобразования:

- а) размястване на два реда (стълба) помежду им;
- б) умножаване на ред (стълб) с различно от нула число;
- в) прибавяне към един ред (стълб) на друг ред (стълб), умножен с число;
- г) транспониране.

Теорема 4.6 *Елементарните преобразования не променят ранга на матрицата.*

Казваме, че една матрица има **диагонална форма**, когато всичките и елементи освен диагоналните $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{kk}$ са равни на нула.

Теорема 4.7 *Всяка матрица може да се приведе в диагонална форма посредством елементарни преобразования.*

Пример 4.2 Намерете чрез елементарни преобразования ранга на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Към втория ред прибавяме първия, умножен по 2.

Получаваме

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Означението $A \sim B$ изразява факта, че матрицата B е получена от матрицата A чрез прилагане на елементарни преобразования.

След като в първия стълб сме получили нули под главния диагонал, то автоматично можем да анулираме елементите в първи ред след главния диагонал, защото това става с умножение на първи стълб с подходящи числа и прибавянето му към съответните стълбове.

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Сега размястваме втори и трети ред

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред с (-3) и прибавяме към трети ред

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

След като и във втория стълб сме получили нули под главния диагонал, то автоматично можем да анулираме елементите след главния диагонал.

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред с $\frac{1}{2}$ и втори ред с (-1) .

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Първият стълб на последната матрица е вектора E_1 , вторият е E_2 , които както знаем са линейно независими и това е максималния брой такива вектори. Следователно тя има ранг 2. Тъй като елементарните преобразования не променят ранга, то рангът на матрицата A също е 2.

Рангът на една матрица в диагонална форма е равен на броя на ненулевите диагонални елементи.

ЗАДАЧИ

4.1. Намерете ранга на матрицата $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \text{(Разменяме местата на първия и третия ред.)} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \text{(Умножаваме първия ред с } -5, -3 \text{ и } -7, \text{ и прибавяме} \\ &\quad \text{съответно към втория, третия и четвъртия ред.)} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 12 & 27 & 3 & 39 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \\ 0 & 16 & 36 & 4 & 50 \end{pmatrix} \sim \text{(Анулираме елементите в първи ред след главния ди-} \\ &\quad \text{агонал и от втория ред изваждаме третия.)} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \\ 0 & 16 & 36 & 4 & 50 \end{pmatrix} \sim \text{(Умножаваме втория ред с } -2 \text{ и } -4 \text{ и прибавяме} \\ &\quad \text{съответно към третия и четвъртия ред.)} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \text{(Анулираме елементите във втори ред след главния} \\ &\quad \text{диагонал.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \text{(Разместваме трети и пети стълб, а след това трети и четвърти ред.)} \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \text{(Умножаваме втория ред с } \frac{1}{4}, \text{ а третия ред с } \frac{1}{8}.) \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(A) = 3.
\end{aligned}$$

Задачи за самостоятелна работа

4.2 Намерете ранга на матриците:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 6 & -4 & 11 & -3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & -12 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 6 & 0 \\ -3 & 15 & 25 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Отг. а) 2; б) 3 в) 2, г) 2

4.3 Намерете ранга на матриците:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 9 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{б) } \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 & -4 & 6 \\ -2 & -30 & -3 & 14 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 2 & -1 \\ 4 & -18 & 3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -12 & 8 & 1 & 9 \\ 2 & -6 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Отг. а) 4; б) 2; в) 3; г) 3

Глава 5

Системи линейни уравнения

Целта на тази глава е да запознае читателя със системите от линейни уравнения и основните методи за тяхното решаване. След усвояване на материала вие ще можете да решавате линейни системи чрез формулите на Крамер и чрез метода на Гаус.

Система линейни уравнения (линейна система) от m уравнения с n неизвестни наричаме система от вида

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Тук $x_1, x_2, \dots, x_n$ са **неизвестни**, числата $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ – **коэффициенти пред неизвестните**, а числата $b_1, b_2, \dots, b_m$ – **свободни членове**. Ако поне един от свободните членове е различен от нула, системата се нарича **нехомогенна**. Когато всички свободни членове са нули, системата се нарича **хомогенна**.

Решение на системата (5.1) наричаме всяка съвкупност от числа

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, x_3 = \alpha_3, \dots, x_n = \alpha_n,$$

които, заместени в уравненията на системата, ги превръщат във верни числови равенства. Да решим една линейна система означава да намерим всичките и решения или да установим, че тя няма решение. Система, която има решение се нарича **съвместима**. Ако системата няма решение, тя се нарича **несъвместима**.

Матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

от коефициентите пред неизвестните наричаме **основна матрица** на системата (5.1) или само **матрица на системата**, а матрицата

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

се нарича **разширена матрица на системата**.

Ако означим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

системата (5.1) можем да запишем като матрично уравнение

$$AX = B \quad (5.2)$$

Пример 5.1 Решете системата:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15 \end{cases}$$

Решение: Записваме системата като матрично уравнение $AX = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Пресмятаме детерминантата на матрицата A (виж Глава 3).

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -34 \neq 0.$$

Следователно матрицата A е неособена и има обратна A^{-1} . Намираме обратната матрица.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -10 & -2 & -4 \\ -13 & 11 & 5 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Следователно:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} -10 & -2 & -4 \\ -13 & 11 & 5 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ -15 \end{pmatrix} = -\frac{1}{34} \begin{pmatrix} 34 \\ 68 \\ 136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Решението на системата е

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -4.$$

Нека (5.3) е линейна система от n уравнения с n неизвестни

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (5.3)$$

Да означим с Δ и Δ_j следните детерминанти:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,j-1} & b_3 & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема 5.1 (Формули на Крамер) Ако $\Delta = \det A \neq 0$, то системата линейни уравнения (5.3) има единствено решение, което се задава със следните формули:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (5.4)$$

Доказателство: В съответствие с (5.2) системата (5.3) можем да запишем като матрично уравнение $A.X = B$. Тъй като $\Delta = \det A \neq 0$, то матрицата A е неособена и следователно матричното уравнение има единствено решение

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= A^{-1}.B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1.A_{11} + b_2.A_{21} + \dots + b_n.A_{n1} \\ b_1.A_{12} + b_2.A_{22} + \dots + b_n.A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1.A_{1n} + b_2.A_{2n} + \dots + b_n.A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следователно

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

■

1. Тъй като системата (5.3) има еднакъв брой уравнения и неизвестни, то матрицата на системата е квадратна и можем да разглеждаме детерминантата Δ , съответстваща на тази матрица.

2. Детерминантата Δ_j се получава от детерминантата Δ като се замени j -ят стълб на Δ със стълба на свободните членове.

3. Формулите на Крамер се прилагат само за линейни системи, които имат еднакъв брой уравнения и неизвестни.

Пример 5.2 Решете системата

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение: Тъй като системата има три уравнения и три неизвестни, то можем да се опитаме да я решим чрез формулите на Крамер. Най-напред пресмятаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Следователно, според Теорема 5.1, системата има единствено решение, което можем да намерим по формулите на Крамер (5.4).

Пресмятаме последователно детерминантите:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -18,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

и получаваме

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-18}{9} = -2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1.$$

Две линейни системи се наричат **еквивалентни**, ако множествата от решенията им съвпадат, т.е. всяко решение на едната е решение на другата и обратно.

Върху линейна система уравнения могат да се извършват следните **елементарни преобразования**:

- 1) Разменяне местата на две уравнения в системата.
- 2) Умножение на уравнение от системата с число, различно от нула.
- 3) Умножение на уравнение от системата с число и прибавяне към друго уравнение.

Теорема 5.2 *Системи, които се получават една от друга чрез елементарни преобразования, са еквивалентни.*

Един от най-често използваните методи за решаване на линейни системи уравнения е **методът на Гаус** (или метод на последователно изключване на неизвестните). Той има **два хода**:

Прав ход – При правия ход чрез последователно елиминиране на неизвестните в стълбовете под главния диагонал получаваме еквивалентна система, която има триъгълен или трапецовиден вид. Елиминирането на неизвестните става чрез прилагане на елементарни преобразования **върху редовете на системата**. При първата стъпка елиминираме неизвестните в първия стълб, при втората стъпка във втория стълб и т.н. Ако след някоя стъпка елементът на главния диагонал в следващия стълб е нула, търсим различен от нула елемент в следващите редове и/или стълбове и чрез съответната размяна на редове и/или стълбове поставяме този елемент на диагонала. Правият ход завършва, когато елиминираме неизвестните под главния диагонал във всички стълбове на системата.

Обратен ход – При обратния ход, тръгвайки от последното уравнение на получената система (тя е еквивалентна на дадената) към първото, намираме последователно всичките неизвестни или установяваме, че системата няма решение.

При числената реализация на метода на Гаус преобразованията се извършват върху редовете на разширената матрица на системата (т.е. неизвестните не се пишат - виж следващите примери). Знакът $\sim$ означава, че системите са еквивалентни. Възможните различни случаи са разгледани в следващите три примера.

Пример 5.3 Чрез метода на Гаус решете системата

$$\left| \begin{array}{cccc|c} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 11x_4 & = & 1 \end{array} \right|$$

Решение: Записваме системата по следния начин:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 11 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Този запис трябва да се възприема като символичен запис на системата само чрез нейните коефициенти. Отвесната черта отделя стълба със свободните членове и замества знаците за равенство.

Прав ход:

Първа стъпка – елиминираме неизвестното x_1 в първия стълб под главния диагонал. За целта умножаваме първи ред с (-1) и го прибавяме последователно към втори и трети ред; първи ред, умножен с (-3) , прибавяме към четвърти ред. Получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -7 & 2 & 10 \end{array} \right) \sim$$

Втора стъпка – елиминираме неизвестното x_2 във втория стълб под главния диагонал, като прибавим втори ред към четвърти и получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 2 & 10 \end{array} \right) \sim$$

Трета стъпка – умножаваме трети ред с $(-\frac{9}{2})$ и го прибавяме към четвърти ред. Получаваме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{array} \right)$$

Всички елементи под главния диагонал са нули. С това правият ход е завършен. Получена система има триъгълен вид.

$$\left| \begin{array}{rrrrr} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & & & = & 0 \\ & & & - & 2x_3 & & & = & 4 \\ & & & & & & 2x_4 & = & -8 \end{array} \right|$$

Забележка: След като правият ход е завършен, то лесно можем да определим ранговете на матриците A и A^* . За разгледания пример имаме $r(A) = r(A^*) = 4$.

Обратен ход:

От последното уравнение получаваме

$$2x_4 = -8. \quad \implies \quad x_4 = -4$$

От предпоследното уравнение получаваме

$$-2x_3 = 4. \quad \implies \quad x_3 = -2$$

Заместваме намерената стойност на x_3 във второто уравнение и получаваме

$$x_2 + 4 = 0 \quad \implies \quad x_2 = -4$$

Заместваме намерените стойности на x_4 , x_3 и x_2 в първото уравнение и получаваме

$$x_1 - 4 - 8 - 12 = -3 \quad \implies \quad x_1 = 21$$

Следователно решението на системата е

$$x_1 = 21 \quad x_2 = -4 \quad x_3 = -2 \quad x_4 = -4$$

Пример 5.4 Решете чрез метода на Гаус системата

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 3 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 4x_5 = 3 \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 - 5x_5 = -3 \end{cases}$$

Решение: Записваме системата по следния начин:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 & -3 \end{array} \right)$$

Когато пресмятанията се извършват на ръка, удобно е числото, чрез което правим нули в стълба под него, да бъде единица. Поради тази причина, преди да започнем правия ход, умножаваме първия ред по две и изваждаме третия ред.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 & -3 \end{array} \right) \sim$$

Прав ход: (обясненията са след пресмятанията)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 15 & -33 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 14 & -26 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 11 & -41 & -9 \end{array} \right) \sim \\ & \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 41 & 9 \\ 0 & -2 & 2 & 14 & -26 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 15 & -33 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 41 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 56 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 49 & 14 \end{array} \right) \sim \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & x_3 & b \\ 1 & 1 & -1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 41 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & x_3 & b \\ 1 & 1 & -1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 41 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Първа стъпка – умножаваме последователно първи ред с (-7) , (-5) , (-6) и го прибавяме съответно към втори, трети и четвърти ред.

Умножаваме четвърти ред по (-1) и го разместваме с втори ред.

Втора стъпка – умножаваме втори ред с (2) и го прибавяме съответно към трети и четвърти ред.

Разместваме трети, четвърти и пети стълб и делим трети и четвърти ред съответно на (-8) и (-7) .

Трета стъпка – умножаваме трети ред с (-1) и го прибавяме към четвърти ред.

Получена система има трапецовиден вид:

$$\left| \begin{array}{cccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_4 & + & 6x_5 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & x_2 & - & 11x_4 & + & 41x_5 & - & x_3 & = & 9 \\ & & & & & & x_4 & - & 7x_5 & & & = & -2 \end{array} \right|$$

Забележка: За този пример имаме $r(A) = r(A^*) = 3 < 5$.

Обратен ход:

В третото уравнение $x_4 - 7x_5 = -2$ има две неизвестни и не можем да определим еднозначно стойностите им. Затова даваме на неизвестното x_5 (*свободно неизвестно*) произволна стойност t , която се нарича *параметър*, т.е.

$$x_5 = t,$$

след което изразяваме x_4 чрез този параметър

$$x_4 = -2 + 7x_5 = -2 + 7t.$$

Във второто уравнение $x_2 - 11x_4 + 41x_5 - x_3 = 9$ отново въвеждаме параметър

$$x_3 = s$$

и получаваме

$$x_2 = 9 + 11(-2 + 7t) - 41t + s = -13 + 36t + s.$$

От първото уравнение $x_1 + x_2 - x_4 + 6x_5 + x_3 = 1$ получаваме

$$x_1 = 1 - (-13 + 36t + s) + (-2 + 7t) - 6t - s = 12 - 35t - 2s.$$

Следователно множеството от всички решения на системата се задава с равенствата

$$\begin{aligned}x_1 &= 12 - 35t - 2s, \\x_2 &= -13 + 36t + s, \\x_3 &= s, \\x_4 &= -2 + 7t, \\x_5 &= t,\end{aligned}$$

които се наричат *общо решение на системата*. В този случай общото решение зависи от два параметъра.

Ако при решаване на система линейни уравнения по метода на Гаус се наложи да разместите два стълба, то трябва да разместите и съответните им неизвестни, записани над хоризонталната черта.

Пример 5.5 Решете чрез метода на Гаус системата

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1 \\ 5x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$$

Решение: Записваме системата по следния начин

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & -2 & 2 & 9 \end{array} \right)$$

Прав ход: (обясненията са след пресмятанията)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & -2 & 2 & 9 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & 7 & -5 \\ 0 & -1 & 8 & 7 & -6 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Първа стъпка – умножаваме последователно първи ред с (-2) , (-5) и го прибавяме съответно към втори и трети.

Втора стъпка – умножаваме втори ред с (-1) и го прибавяме към трети.

Последното уравнение на системата е $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1$. Следователно системата няма решение, т.е. тя е несъвместима.

Забележка: За разгледания пример ранговете на основната матрица A и на разширената матрица A^* са различни. Имаме $r(A) = 2$, а $r(A^*) = 3$.

Теорема 5.3 (Теорема на Кронекер-Капели)

Системата (5.1) е съвместима тогава и само тогава, когато рангът на основната матрицата $r(A)$ е равен на ранга на разширената матрица $r(A^*)$.

1. Ако $r(A) = r(A^*) = n$, то системата има единствено решение.
2. Ако $r(A) = r(A^*) = s < n$, то системата има безброй решения, зависещи от $(n - s)$ параметъра.

Нека (5.5) е линейна хомогенна система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Очевидно, всяка линейна хомогенна система има тривиалното нулево решение $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Теорема 5.4 *Необходимо и достатъчно условие една линейна хомогенна система да има ненулево решение е рангът на основната матрицата да бъде по-малък от броя на неизвестните.*

Доказателство: 1. Нека рангът на основната матрицата е по-малък от броя на неизвестните. Тогава от Теорема 5.3 следва, че системата има безброй много решения и поне едно от тях ще е ненулево.

2. Нека системата (5.5) има ненулево решение. Да допуснем, че рангът на основната матрицата е равен на броя на неизвестните. Тогава от Теорема 5.3 следва, че системата има единствено решение и то е нулевото. Получихме противоречие и следователно рангът на основната матрицата е по-малък от броя на неизвестните. ■

Следствие 5.1 *Линейна хомогенна система, в която броят на уравненията е по-малък от броя на неизвестните, има ненулево решение.*

Следствие 5.2 *Една линейна хомогенна система от n уравнения с n неизвестни има ненулево решение тогава и само тогава, когато детерминантата на матрицата на системата е равна на нула.*

Пример 5.6 Решете системата

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение: **Прав ход:**

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Първа стъпка – умножаваме последователно първи ред с (-2) , (-1) , (-3) и го прибавяме съответно към втори, трети и четвърти ред.

Умножаваме втори ред по 2 и от него вадим трети ред.

Втора стъпка – умножаваме последователно втори ред с (-3) и (-5) и го и прибавяме съответно към трети и четвърти ред.

Делим трети ред на (-2) .

Трета стъпка – умножаваме трети ред с 5 и го прибавяме към четвърти ред.

Обратен ход:

В четвъртото уравнение $3x_4 - 3x_5 = 0$ въвеждаме параметър $x_5 = t$ и изразяваме

$$x_4 = x_5 = t.$$

От третото уравнение $x_3 + x_4 - x_5 = 0$ получаваме $x_3 = 0$.

От второто уравнение получаваме $x_2 = 0$.

От първото уравнение $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0$ получаваме $x_1 = 0$.

Следователно общото решение на системата е

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = x_5 = t$$

и зависи от един параметър.

1. Формулите на Крамер се прилагат само за системи, в които броят на уравненията е равен на броя на неизвестните. Те имат повече теоретично значение, защото пресмятането на детерминанти от по-висок ред е трудоемък процес.

2. Методът на Гаус е универсален метод за решаване на линейни системи и е приложим независимо от това какъв е броят на уравненията и какъв е броят на неизвестните.

ЗАДАЧИ

Решете системите:

$$5.1 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Решение: Прилагаме метода на Гаус.

Прав ход:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & | & b \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & | & b \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & | & b \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & | & b \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Първа стъпка – умножаваме първи ред с (-1) и го прибавяме към четвърти ред.

Втора стъпка – прибавяме втори ред към четвърти ред.

Трета стъпка – умножаваме трети ред с (-1) и го прибавяме към четвърти ред.

Обратен ход:

От третото уравнение $x_3 + x_4 = 1$ получаваме $x_4 = t$, $x_3 = 1 - t$.

От второто уравнение получаваме $x_2 = -x_3 = t - 1$.

От първото уравнение получаваме $x_1 = -x_2 = 1 - t$.

Следователно общото решение е

$$x_1 = x_3 = 1 - t, \quad x_2 = t - 1, \quad x_4 = t$$

и зависи от един параметър.

Задачи за самостоятелна работа:

Решете системите:

$$5.2 \quad \left| \begin{array}{rrrr} 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Отг. } x_1 = x_2 = x_3 = 1 \quad (\Delta = 9)$$

$$5.3 \quad \left| \begin{array}{rrrrrr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 4 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & 3x_4 & = & 1 \\ & - & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -3 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Отг. } x_1 &= -8, \quad x_2 = 3 + t \\ x_3 &= 6 + 2t, \quad x_4 = t \end{aligned}$$

$$5.4 \quad \left| \begin{array}{rrrr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Отг. } x_1 = 2t, \quad x_2 = -3t, \quad x_3 = t$$

$$5.5 \quad \left| \begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & - & 8x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Отг. } x_1 &= 6 + 10t, \quad x_2 = -2 - 5t \\ x_3 &= t, \quad x_4 = 1 + 3t \end{aligned}$$

$$5.6 \quad \left| \begin{array}{rrrr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\text{Отг. несъвместима}$$

$$5.7 \quad \left| \begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Отг. } x_1 &= x_3 = t \\ x_2 &= (2 - 7t)/5 \\ x_4 &= (6t - 1)/5 \end{aligned}$$

$$5.8 \quad \left| \begin{array}{rrrrrrrr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & -2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 23 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & 12 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Отг. } x_1 &= -16 + t + p + 5u \\ x_2 &= 23 - 2t - 2p - 6u \end{aligned}$$

$$x_3 = t, \quad x_4 = p, \quad x_5 = u$$

$$5.9 \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 11x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Отг. несъвместима

$$5.10 \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Отг. } x_1 &= (-4t + 7p)/8 \\ x_2 &= (-4t + 5p)/8 \\ x_3 &= (4t - 5p)/8 \\ x_4 &= t, \quad x_5 = p \end{aligned}$$

$$5.11 \quad \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Отг. } x_1 &= -1 + t + 2p \\ x_2 &= -3 + t + 2p \\ x_3 &= t, \quad x_4 = p \end{aligned}$$

$$5.12 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = b \\ 9x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = a - 51 \end{cases},$$

ако

$$a = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

а b е най-големият отрицателен корен на уравнението

$$x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 6x - 8 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Отг. } a &= 54, \quad b = -1 \\ x_1 &= -11 + 6t \\ x_2 &= 24 - 13t \\ x_3 &= -29 + 17t \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

Глава 6

Вектори

Целта на тази глава е да припомни и разшири познанията на читателя за понятието вектор и основните действия с вектори, главно в координатна форма, както и да го запознае с операциите скалярно, векторно и смесено произведение. След усвояване на материала вие ще можете да намирате координатите на сума, разлика и произведение на вектор с число; да пресмятате координатите на точка, деляща отсечка в дадено отношение; да пресмятате скалярно, векторно и смесено произведение на вектори; да прилагате въведените понятия и операции за пресмятане на лица, обеми и други.

1. Вектор. Сума и разлика на вектори. Произведение на вектор с число.

Насочена отсечка (вектор) наричаме отсечка, ограничена от две точки, едната от които е избрана за начало, а другата за край. Ако началото е A , а краят е B , вектора означаваме с $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Дължината на отсечката AB наричаме **дължина (модул)** на вектора. Означаваме с $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

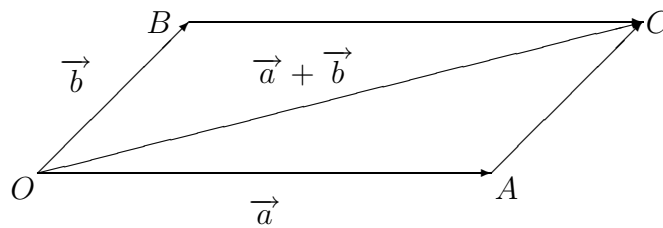
Вектор, на който началото и краят съвпадат, наричаме **нулев вектор** $\vec{0}$. Вектор с дължина 1 наричаме **единичен**.

Два вектора са **равни**, ако имат равни дължини и еднакви посоки. Ако два вектора са равни, ще ги считаме за един и същи вектор.

Вектори, които са успоредни на една права се наричат **колинеарни**, а вектори, които лежат в една равнина или са успоредни на една равнина се наричат **компланарни**.

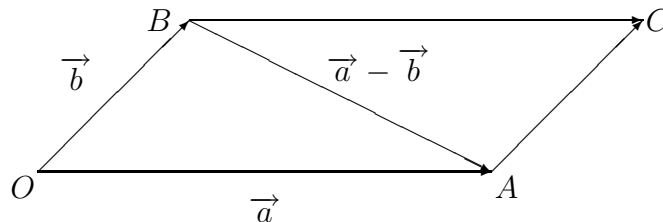
Сума на векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ наричаме вектора $\vec{b}$ с начало, съвпадащо с началото на първия вектор и край, съвпадащ с края на последния вектор, ако векторите са разположени така, че началото на всеки от тях да съвпада с края на предхождания го. Означаваме с $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$.

Сумата на два неколинеарни вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, нанесени с общо начало, е векторът $\overrightarrow{OC}$ - **диагонал на успоредника**, построен върху дадените вектори.



Разлика на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е трети вектор $\vec{c}$, за който $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са нанесени с общо начало, то векторът $\vec{a} - \vec{b}$ съединява краищата им и е насочен от края на $\vec{b}$ към края на $\vec{a}$.



Произведение на вектор $\vec{a}$ с реално число m наричаме вектор $\vec{b}$, чиято посока съвпада с посоката на $\vec{a}$ при $m > 0$, противоположна е при $m < 0$ и $|\vec{b}| = |m| \cdot |\vec{a}|$.

Ако $\vec{a}$ е ненулев вектор и $\vec{b}$ е произволен колинеарен с него вектор, то съществува единствено число m , такова че $\vec{b} = m \cdot \vec{a}$. Очевидно е, че $m = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$,

ако векторите са едноразположни колинеарни и $m = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, ако те са разноразположни колинеарни.

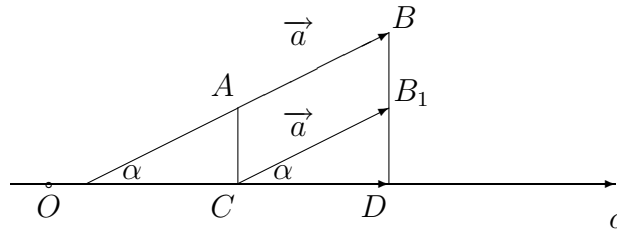
Векторът $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ е едноразположен с вектора $\vec{a}$ и има дължина единица.

В множеството на векторите въведохме две операции - събиране на вектори и умножение на вектор с число. Лесно може да се провери, че така въведените операции притежават следните осем свойства:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативен закон за събирането)
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (асоциативен закон за събирането)
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
5. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
6. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
7. $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$
8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Всяко множество от обекти, в което са въведени такива две операции се нарича **векторно пространство**.

Правата, на която е избрана посоката, се нарича **ос**. Нека са дадени ос s и вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.



Нека AC и BD са перпендикулярни на оста c и да означим с α ъгъла между вектора $\vec{a}$ и оста c . Векторът $\vec{CD}$ наричаме **геометрична проекция на вектора $\vec{a}$ върху c** .

Алгебрична проекция на вектора $\vec{a}$ върху оста c наричаме дължината на векторната проекция $\vec{CD}$, взета със знак плюс, ако посоката на $\vec{CD}$ съвпада с положителната посока на оста и със знак минус когато посоките на $\vec{CD}$ и c са противоположни.

Алгебричната проекция ще наричаме за краткост само проекция и ще бележим с $\text{пр}_c \vec{a}$. От правоъгълния $\triangle CDB_1$ се вижда, че проекцията на вектора е равна на дължината на вектора умножена по косинуса на α , т.е.

$$\text{пр}_c \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha \quad (6.1)$$

Чрез разглеждане на различните възможни случаи лесно може да се докаже, че са в сила следните свойства:

$$\text{пр}_c (\lambda \vec{a}) = \lambda \text{пр}_c \vec{a} \quad (6.2)$$

$$\text{пр}_c (\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_c \vec{a} + \text{пр}_c \vec{b} \quad (6.3)$$

2. Линейна зависимост и независимост на вектори.

Нека $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ е множество от вектори в равнината или вектори в пространството.

Казваме, че векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ са **линейно зависими**, ако съществуват константи $c_1, c_2, \dots, c_n$ (поне една различна от нула) такива, че да е изпълнено

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad (6.4)$$

Ако равенството (6.4) е изпълнено само за $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, то векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ се наричат **линейно независими**.

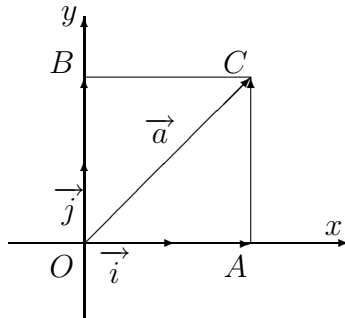
Теорема 6.1 *Два вектора са линейно зависими тогава и само тогава, когато са колинеарни. Три вектора са линейно зависими тогава и само тогава, когато са компланарни.*

В сила са Теорема 4.1, 4.2 и следствие 4.2.

Подмножество от максимален брой линейно независими вектори образуват **базис**. Броят на векторите в базиса определя размерността на съответното векторно пространство. В следващите редове ще се убедим, че в равнината има базис от 2 вектора и всеки друг вектор се изразява по единствен начин като линейна комбинация на векторите от базиса. Аналогично в пространството има базис от 3

вектора и всеки друг вектор се изразява по единствен начин като линейна комбинация на векторите от базиса.

Да разгледаме равнинния случай. Първо да припомним, че две взаимно-перпендикулярни оси с общо начало O и една и съща единица за дължина образуват декартова правоъгълна координатна система в равнината.



Нека $\vec{i}$, $\vec{j}$ са единични вектори, еднопосочни с координатните оси. Тези два вектора са линейно независими, в противен случай ще следва, че те са колинеарни. Да вземем трети вектор $\vec{a}$. Имаме две възможности - или $\vec{a}$ да лежи на някоя от осите или да бъде в общо положение (както е на чертежа). Ако $\vec{a}$ лежи на някоя от осите, то той и съответния вектор $\vec{i}$ или $\vec{j}$ са колинеарни, т.е. линейно зависими, а следователно и трите вектора $\vec{a}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ са линейно зависими. Ако $\vec{a}$ е в общо положение, то

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \vec{OB}.$$

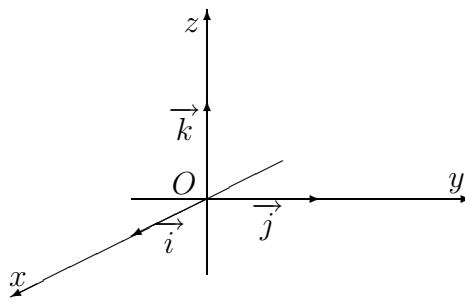
Но $\vec{OA} = a_1 \cdot \vec{i}$, а $\vec{OB} = a_2 \cdot \vec{j}$, където a_1 и a_2 са алгебричните проекции на $\vec{a}$ върху съответните координатни оси. Следователно:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}, \quad (6.5)$$

т.е. трите вектора $\vec{a}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ отново са линейно зависими. Следователно векторите $\vec{i}$ и $\vec{j}$ образуват базис. Нещо повече, от равенство (6.5) виждаме, че всеки вектор в равнината се представя като линейна комбинация на векторите от базиса. Сега ще покажем, че това представяне е единствено. Наистина, ако допуснем че $\vec{a} = b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j}$ ще следва, че $\vec{0} = (a_1 - b_1) \cdot \vec{i} + (a_2 - b_2) \cdot \vec{j}$ и тъй като $\vec{i}$ и $\vec{j}$ са линейно независими, то следва че $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$.

Числата a_1 , a_2 наричаме **координати** на вектора $\vec{a}$ и означаваме с $\vec{a}(a_1, a_2)$. Базисните вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$ имат съответно координати $\vec{i}(1, 0)$, $\vec{j}(0, 1)$.

Три взаимно-перпендикулярни оси с общо начало O и една и съща единица за дължина образуват декартова правоъгълна координатна система в пространството.



Нека $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ са единични вектори, еднопосочни с координатните оси. Аналогично на предишните разсъждения можем да се убедим, че трите вектора образуват базис и всеки друг вектор в пространството се представя по единствен начин като тяхна линейна комбинация

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}.$$

Числата a_1 , a_2 , a_3 наричаме **координати** на вектора $\vec{a}$ и означаваме с

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3).$$

Координатите на вектор са равни на съответните алгебрични проекции на вектора върху координатните оси. Първата координата a_1 се нарича **абсциса**, втората a_2 - **ордината**, а третата a_3 - **апликата**.

Базисните вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ имат съответно координати $\vec{i}(1, 0, 0)$, $\vec{j}(0, 1, 0)$ и $\vec{k}(0, 0, 1)$. Тъй като трите вектора са единични и взаимно перпендикулярни, казваме че те образуват **ортонормиран базис**.

Ако са дадени векторите $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b}(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3) \quad (6.6)$$

$$k\vec{a}(ka_1, ka_2, ka_3). \quad (6.7)$$

От формули (6.6) и (6.7) следва, че координатите на вектор, който е линейна комбинация на дадени вектори, са същите линейни комбинации от съответните координати на дадените вектори.

Координатите на вектора $\overrightarrow{OM}$ наричаме координати на точката M .

Ако са дадени точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то векторът $\overrightarrow{M_1M_2}$ има координати

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \quad (6.8)$$

Координатите на точката M , деляща отсечката M_1M_2 в отношение λ ($\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$) са:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (6.9)$$

Ако M е среда на отсечката M_1M_2 , то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (6.10)$$

Пример 6.1: Дадени са точките $A(5, 3, 9)$, $B(-1, 3, -3)$, $C(2, -3, 5)$, $D(3, 1, 6)$. Да се намерят координатите на $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ и точката M , за която $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$

Решение: За да намерим координатите на вектора $\overrightarrow{AB}$, трябва от координатите на втората точка B да извадим координатите на първата A .

Следователно:

$$\overrightarrow{AB}(-6, 0, -12), \quad \overrightarrow{CD}(1, 4, 1).$$

Координатите на $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ са $\overrightarrow{c}(-15, -12, -27)$

За да определим координатите на точка M , използваме формули (6.9) при $\lambda = 2$.

Следователно:

$$x_M = \frac{x_A + 2x_B}{3} = 1, \quad y_M = \frac{y_A + 2y_B}{3} = 3, \quad z_M = \frac{z_A + 2z_B}{3} = 1$$

Пример 6.2: Векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са линейно независими. Да се определи дали векторите $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = -\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{r} = 2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ са линейно зависими или линейно независими.

Решение: Записваме основното дефиниционно равенство (6.4) за векторите $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$

$$c_1 \overrightarrow{p} + c_2 \overrightarrow{q} + c_3 \overrightarrow{r} = \overrightarrow{o}$$

Следователно:

$$c_1(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) + c_2(-\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) + c_3(2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{o}$$

Преобразуваме и получаваме

$$(2c_1 - c_2 + 2c_3)\overrightarrow{a} + (-c_1 + 2c_2 + 2c_3)\overrightarrow{b} + (-c_1 - c_2 + c_3)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{o}$$

Но векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ са линейно независими. Следователно последното равенство е възможно само ако коефициентите в скобите са нули.

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0 \\ -c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

Ако тази хомогенна система от три уравнения с три неизвестни има ненулево решение, то векторите $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$ ще са линейно зависими. Ако има само нулевото решение, то те ще са линейно независими.

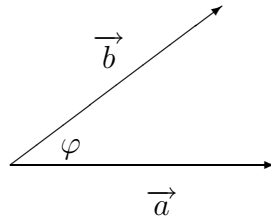
Тъй като детерминантата на системата

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0,$$

то според формулите на Крамер (Глава 5, Теорема 5.1) системата има само нулевото решение и следователно трите вектора са линейно независими.

3. Скалярно и векторно произведение на два вектора. Смесено произведение на три вектора.

Нека са дадени два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и нека ъгълът между тях е φ . Да означим с a и b осите, определени съответно от двата вектора.



Дефиниция 6.1 *Скалярно произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наричаме числото*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{a}| \text{пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_b \vec{a} \quad (6.11)$$

Свойства:

1. $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0, \quad \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
3. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
4. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Свойства 1 и 2 са очевидни. Ще докажем верността на свойства 3 и 4.

Доказателство: 3. От (6.11) и (6.2) имаме

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_b (\lambda \vec{a}) = |\vec{b}| \lambda \text{пр}_b \vec{a} = \lambda |\vec{b}| \text{пр}_b \vec{a} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = |\vec{a}| \text{пр}_a (\lambda \vec{b}) = |\vec{a}| \lambda \text{пр}_a \vec{b} = \lambda |\vec{a}| \text{пр}_a \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

4. От (6.11) и (6.3) имаме

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= |\vec{a}| \text{пр}_a (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| (\text{пр}_a \vec{b} + \text{пр}_a \vec{c}) = \\ &= |\vec{a}| \text{пр}_a \vec{b} + |\vec{a}| \text{пр}_a \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

■

Теорема 6.2 *Два ненулеви вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са перпендикулярни тогава и само тогава, когато тяхното скалярно произведение е равно на нула.*

Доказателство: 1. Нека $\vec{a} \perp \vec{b}$. Тогава $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

2. Нека $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = 0$. Но $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$. Това означава, че $\cos \varphi = 0$. Следователно $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$. ■

Използвайки дефиницията на скалярно произведение, свойство 2 и теорема 6.2 лесно можем да пресметнем скалярните произведения между ортонормираните базисни вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Получаваме:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1, & \vec{j} \cdot \vec{i} &= 0, & \vec{k} \cdot \vec{i} &= 0, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= 0, & \vec{j} \cdot \vec{j} &= 1, & \vec{k} \cdot \vec{j} &= 0, \\ \vec{i} \cdot \vec{k} &= 0, & \vec{j} \cdot \vec{k} &= 0, & \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1. \end{aligned}$$

Следователно, ако векторите $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ са зададени с координатите си, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (6.12)$$

Приложения на скаларното произведение:

1. Дължина на вектор: Нека $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (6.13)$$

2. Разстояние между две точки: Нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са две точки в пространството. Тогава

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (6.14)$$

3. Ъгъл между два вектора:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (6.15)$$

4. Директорни косинуси на вектор:

Нека вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ сключва с осите Ox, Oy и Oz съответно ъгли α, β и γ . Тогава

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| |\vec{i}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \\ \cos \beta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| |\vec{j}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \end{aligned}$$

Следователно

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Ако $\vec{a}$ е единичен вектор ($\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$), получаваме че $a_1 = \cos \alpha$, $a_2 = \cos \beta$ и $a_3 = \cos \gamma$, т.е. директорните косинуси са координатите на единичния вектор по направление на вектора $\vec{a}$.

5. Пресмятане работата на сила: Нека на материална точка е приложена сила $\vec{F}$, която премества точката от точка O до точка B , т.е. на разстояние $|\vec{s}| = |\vec{OB}|$. Тогава работата A , която силата извършва е равна на скаларното произведение на векторите $\vec{F}$ и $\vec{s}$, т.е. $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Пример 6.3: Дадени са векторите $\vec{a}(2, -1, 2)$ и $\vec{b}(6, -3, 2)$. Пресметнете $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ и директорните косинуси на $\vec{a}$.

Решение: 1. Скаларното произведение пресмятаме по формула (6.12) и получаваме

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 6 + (-1)(-3) + 2 \cdot 2 = 12 + 3 + 4 = 19.$$

2. Дължините на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пресмятаме по формула (6.13) и получаваме

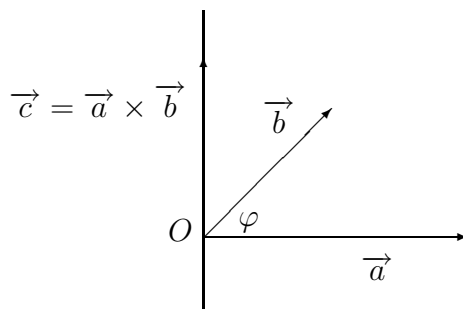
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3, \quad |\vec{b}| = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7.$$

3. Ъгълът между двата вектора пресмятаме по формула (6.15) и получаваме

$$\cos \varphi = \frac{19}{21}.$$

4. Пресмятаме координатите на $\vec{a}^0 \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right)$. Следователно

$\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = \frac{-1}{3}$, $\cos \gamma = \frac{2}{3}$, което показва, че векторът $\vec{a}$ сключва равни остри ъгли с осите Ox и Oz и тъп ъгъл с оста Oy .



Дефиниция 6.2 Векторно произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наричаме трети вектор $\vec{c}$, определен от условията:

- 1) Векторът $\vec{c}$ е перпендикулярен на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- 2) Посоката на вектора $\vec{c}$ е такава, че векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ да образуват дясно-ориентирана тройка.
- 3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$

Векторното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ означаваме с $\vec{a} \times \vec{b}$.

1. Първото условие в дефиницията на векторното произведение означава, че векторът $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ е перпендикулярен на равнината, определена от двата вектора.

2. Условието трите вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (в дадения ред) да образуват дясно-ориентирана тройка означава следното: при наблюдение от края на третия вектор $\vec{c}$ завъртането на първия вектор $\vec{a}$ на ъгъл по-малък от 180° до съвпадането му с втория вектор $\vec{b}$ се вижда в посока, обратна на часовниковата стрелка. Тази посока в математиката е приета за положителна.

3. Третото условие показва каква е дължината на новия вектор. Тя е равна на лицето на успоредника, определен от двата вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Свойство 3 ще приемем без доказателство. Ще докажем верността на свойства 1 и 2.

Доказателство: 1. Нека $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, а $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$. От дефиницията на векторно произведение следва, че двата вектора са перпендикулярни на равнината, определена от векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имат равни дължини, но противоположни посоки.

2. Ще докажем първо равенството $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, като разгледаме три случая: $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

Ако $\lambda = 0$, получаваме $\vec{0} = \vec{0}$.

Ако $\lambda > 0$, векторите $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ и $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ са еднопосочно колинеарни с вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ и имат равни дължини $|\lambda| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$. Следователно са равни.

Ако $\lambda < 0$, векторите $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ и $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ са разнопосочно колинеарни с вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ и отново имат равни дължини $|\lambda| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, т.е. пак са равни.

Равенството $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ следва от вече доказаното и свойство 1. Наистина:

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = -(\lambda \vec{b}) \times \vec{a} = -\lambda(\vec{b} \times \vec{a}) = -(-\lambda(\vec{a} \times \vec{b})) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

Теорема 6.3 Векторното произведение на два ненулеви вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е равно на $\vec{0}$ тогава и само тогава, когато те са колинеарни.

Доказателство: 1. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни. Следователно $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. Тогава $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = 0$. Следователно $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

2. Нека $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Тогава $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = 0$. Но $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$. Това означава, че $\sin \varphi = 0$. Следователно $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни. ■

Използвайки дефиницията на векторно произведение, свойство 1 и теорема 6.3 лесно можем да пресметнем векторните произведения между базисните вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Получаваме:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0}, & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{j} &= \vec{0}, & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}, \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}, & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Следователно, ако векторите $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ са зададени с координатите си, то

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k},$$

което лесно можем да запомним чрез използване на детерминанта

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \quad (6.16)$$

Пример 6.4: Дадени са векторите $\vec{a}(2, -1, 2)$ и $\vec{b}(6, -3, 2)$. Пресметнете $\vec{a} \times \vec{b}$ и $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Решение: 1. Векторното произведение пресмятаме по формула (6.16) и получаваме

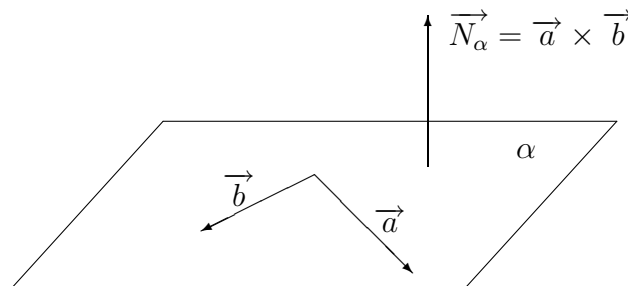
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} + 8\vec{j}.$$

2. Дължината на вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ пресмятаме по формула (6.13) и получаваме

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}.$$

Приложения на векторното произведение:

1. Нормален вектор на равнина: Нека са дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и нека определената от тях равнина означим с α . Тогава $\vec{N}_\alpha = \vec{a} \times \vec{b}$ е перпендикулярен (нормален) на равнината.



2. Пресмятане момент на сила: Нека твърдо тяло е закрепено неподвижно в точка A , а в точка B на тялото е приложена сила $\vec{F}$. Тогава в точка A възниква въртящ момент $\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}$.

Пример 6.5: Твърдо тяло е закрепено в точката $A(2, 1, 3)$, а в точка $B(0, 1, 3)$ е приложена сила $\vec{F}(0, 4, 3)$. Намерете момента на силата относно точка A и неговата големина.

Решение:

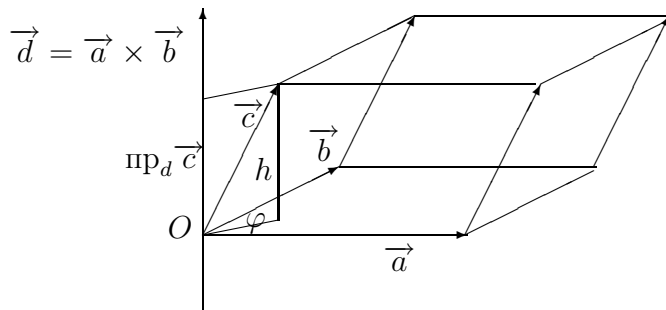
Намираме координатите на вектор $\vec{AB}(-2, 0, 0)$ и пресмятаме

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{j} - 8\vec{k}$$

Големината на момента е $|\vec{M}| = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.

Дефиниция 6.3 *Смесено произведение* на три вектора $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ наричаме числото, получено от умножаването на първите два вектора векторно, след което получения вектор е умножен с третия вектор скалярно, т.е

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$



Нека трите вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са некомпланарни. Тогава векторът $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ е перпендикулярен на равнината, определена от $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и големината му е равна на лицето на успоредника, определен от двата вектора. Скаларното произведение на векторите $\vec{d}$ и $\vec{c}$ се получава като умножим дължината на $\vec{d}$ по проекцията на $\vec{c}$ върху оста, определена от $\vec{d}$. Но големината на тази проекция е равна на дължината на височината h на паралелепипеда, който трите вектора образуват. Следователно получихме, че обемът на паралелепипеда, определен от трите вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е равен на $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

Ако $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, то $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$

$$\begin{aligned} &= ((a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}) \cdot (c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}) = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 = \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Свойства:

1. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$
2. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$

Доказателство: Доказателството на двете свойства следва непосредствено от (6.17) и познатото ни свойство, че при разместване на два реда на една детерминанта помежду им, тя променя само своя знак.

Теорема 6.4 *Необходимото и достатъчно условие три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ да са компланарни е тяхното смесено произведение да бъде равно на нула.*

Доказателство: 1. Нека трите вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни. Това означава, че единият от тях се изразява като линейна комбинация на останалите два вектора. Но тогава единият от редовете на детерминантата (6.17) ще бъде линейна комбинация на останалите два реда, а това както знаем означава, че детерминантата е равна на нула, т.е. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

2. Обратно, нека сега $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Но тогава от Теорема 4.6 (Глава 4) следва, че някой ред на детерминантата (6.17) е линейна комбинация на останалите два реда, т.е. трите вектора са компланарни. ■

Теорема 6.4 има следното геометрично тълкуване: щом смесеното произведение на трите вектора е нула, това означава, че обемът на паралелепипеда е нула, т.е. трите вектора не образуват паралелепипед. Следователно трите вектора лежат в една равнина.

1. Чрез скаларното произведение лесно можем да проверим дали два вектора са перпендикулярни, да пресметнем дължината на вектор и ъгъла между два вектора.

2. Чрез векторното произведение лесно можем да получим вектор, перпендикулярен на равнината, определена от два неколинеарни вектора и да пресметнем лицето на успоредник или триъгълник.

3. Чрез смесеното произведение лесно можем да проверим дали четири точки лежат в една равнина, както и да пресметнем обема на паралелепипед или пирамида.

Пример 6.6: Дадени са точките $A(1, -5, 4)$, $B(0, -3, 1)$, $C(-2, -4, 3)$, $D(3.5, 0, -4.5)$, $E(4, 4, -2)$.

- 1) Да се намери $\sphericalangle ABC$.
- 2) Да се намери лицето на $\triangle ABC$.
- 3) Да се докаже, че векторите $\vec{BD}$ и $\vec{DE}$ са перпендикулярни.
- 4) Да се намери вектор $\vec{x}$ с дължина $\sqrt{10}$, перпендикулярен на равнината, определена от точките A , B , C .
- 5) Да се докаже, че точките A , B , C и D лежат в една равнина, а точката E не лежи в тази равнина.
- 6) Да се намери обема на тетраедъра $ABCE$.

Решение:

- 1) Намираме координатите на векторите $\vec{BA}$ и $\vec{BC}$ и прилагаме формула (6.15).

$$\vec{BA}(1, -2, 3), \quad \vec{BC}(-2, -1, 2)$$

$$\cos \sphericalangle ABC = \cos \sphericalangle(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{-2 + 2 + 6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

2)

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1\vec{i} - 8\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2 + (-5)^2} = 3\sqrt{10}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

3) Намираме координатите на векторите $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DE}$ и проверяваме дали скаларното произведение е нула.

$$\overrightarrow{BD}(\frac{7}{2}, 3, \frac{-11}{2},) \quad \overrightarrow{DE}(\frac{1}{2}, 4, \frac{5}{2},)$$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{7}{4} + 12 - \frac{55}{4} = 0$$

Следователно $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{DE}$.

$$4) \quad \vec{x} \perp \overrightarrow{BA}, \quad \vec{x} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow \vec{x} \parallel (\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC})$$

$$\Rightarrow \vec{x} = k(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC})$$

$$\Rightarrow \vec{x}(-k, -8k, -5k)$$

$$\Rightarrow |\vec{x}| = \sqrt{k^2 + 64k^2 + 25k^2} = 3|k|\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow |k| = \frac{1}{3}, \quad k = \pm \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{8}{3}, \pm \frac{5}{3})$$

5)

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ \frac{7}{2} & 3 & \frac{-11}{2} \end{vmatrix} = 0$$

Тъй като смесеното произведение на трите вектора е нула, тези три вектора лежат в една равнина. Следователно и точките A , B , C , D също лежат в една равнина.

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \end{vmatrix} = -45 \neq 0$$

Следователно точките A , B , C и E не лежат в една равнина.

6)

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})| = \frac{45}{6}$$

ЗАДАЧИ

6.1. Координатите на върховете на триъгълник са $A(1, -5)$, $B(3, -7)$ и $C(5, -3)$. Намерете координатите на центъра на тежестта на триъгълника.

Решение: Център на тежестта (медицентър) на триъгълник се нарича пресечната точка на медианите. Ако O е произволна точка, а центъра на тежестта означим с G , то е в сила следното векторно равенство

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

От тук следва, че координатите на центъра на тежестта се получават, като се съберат съответните координати на трите върха и сумата се раздели на три. Следователно

$$G(3, -5).$$

6.2. Дадени са точките $A(3, 4, -2)$, $M(0, 2, 1)$ и $N(4, 2, 3)$. Да се намерят точките B и C така, че M да бъде център на тежестта на триъгълник ABC , а N среда на страната AB .

Решение: Нека координатите на точките B и C са

$$B(x_1, y_1, z_1) \quad C(x_2, y_2, z_2).$$

Тъй като N е среда на отсечката AB , то от формулите за среда на отсечка (формули (6.10)) следва

$$\frac{3 + x_1}{2} = 4, \quad \frac{4 + y_1}{2} = 2, \quad \frac{-2 + z_1}{2} = 3.$$

Следователно

$$x_1 = 5, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 8, \quad \text{т.е. } B(5, 0, 8).$$

Сега като използваме предната задача, получаваме:

$$\frac{3 + 5 + x_2}{3} = 0, \quad \frac{4 + 0 + y_2}{3} = 2, \quad \frac{-2 + 8 + z_2}{3} = 1.$$

Следователно

$$x_2 = -8, \quad y_2 = 2, \quad z_2 = -3, \quad \text{т.е. } C(-8, 2, -3).$$

6.3. Да се намерят вектори, насочени по ъглополовящите на ъгъла, образуван от векторите $\vec{a}(2, -2, 1)$ и $\vec{b}(2, 4, -4)$.

Решение: Ако два вектора с общо начало имат равни дължини, то тяхната сума и тяхната разлика са вектори, насочени по ъглополовящите съответно на вътрешния и външния ъгъл, образувани от двата вектора. Следователно, за да получим вектори, насочени по ъглополовящите, можем да съберем и извадим съответно единичните вектори по посока на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пресмятаме дължините на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по формула (6.13) и получаваме

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3, \quad |\vec{b}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6.$$

Следователно

$$\vec{a}^0\left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \vec{b}^0\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

Вектори, насочени по ъглополовящите са

$$\vec{l}_1 = \vec{a}^0 + \vec{b}^0, \quad \vec{l}_2 = \vec{a}^0 - \vec{b}^0$$

Следователно

$$\vec{l}_1\left(1, 0, \frac{-1}{3}\right), \quad \vec{l}_2\left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 1\right)$$

6.4. Да се намери вектор, който е перпендикулярен на векторите $\vec{a}(2, -3, 1)$ и $\vec{b}(1, -2, 3)$, а скаларното му произведение с вектора $\vec{d}(1, 2, -7)$ е равно на 10.

Решение: Както знаем, векторното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е вектор, перпендикулярен на двата вектора.

Пресмятаме

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 5\vec{j} - 1\vec{k}.$$

Векторът $\vec{x}(x_1, y_1, z_1)$, който търсим, също е перпендикулярен на двата вектора и следователно векторите $\vec{x}$ и $\vec{c}$ са колинеарни, т.е. $\vec{x} = k\vec{c}(-7k, -5k, -k)$.

От условието $\vec{x} \cdot \vec{d} = 10$ получаваме

$$-7k - 10k + 7k = 10 \quad \implies \quad k = -1.$$

Следователно

$$\vec{x}(7, 5, 1).$$

6.5. Да се намери дължината на височината през върха B на триъгълник ABC , ако $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$, $C(6, 2, 0)$.

Решение: Да означим дължината на височината от върха B с h_b . Тогава

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AC}| \cdot h_b.$$

От друга страна (виж трета точка от коментара след дефиницията на векторно произведение)

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Като приравним двете формули за лице на триъгълник, получаваме

$$h_b = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AC}|}$$

Пресмятаме:

1. $\vec{AC}(5, 4, -8), \quad \vec{AB}(-1, 2, -4)$
2. $\vec{AC} \times \vec{AB} = 28 \vec{j} + 14 \vec{k}$
3. $|\vec{AC} \times \vec{AB}| = \sqrt{28^2 + 14^2} = \sqrt{980}$
4. $|\vec{AC}| = \sqrt{25 + 16 + 64} = \sqrt{105}$

Следователно

$$h_b = \frac{\sqrt{980}}{\sqrt{105}} = \sqrt{\frac{980}{105}} = \frac{2}{3} \sqrt{21}$$

6.6. Дадени са точките $A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7), D(-5, -4, 8)$. Намерете дължината на височината, спусната от върха D на тетраедъра $ABCD$.

Решение:

1. $\vec{AB}(2, -2, -3), \quad \vec{AC}(4, 0, 6), \quad \vec{AD}(-7, -7, 7)$

2.

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308$$

3. Да означим дължината на височината от върха D с h . Тогава:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{6} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \cdot h$$

4. От друга страна

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$$

Следователно

$$h = \frac{|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}$$

5.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}$$

6.

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{144 + 576 + 64} = \sqrt{784} = 28$$

Следователно

$$h = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{308}{28} = 11.$$

Задачи за самостоятелна работа:

6.7. Проверете дали точките $A(3, 2, -1)$, $B(2, 4, 2)$ и $C(0, 8, 8)$ лежат на една права. Отг. Да.

6.8. Проверете дали точките $A(1, 3, 5)$, $B(-2, 1, 0)$, $C(4, -2, 3)$ и $D(-2, 2, 4)$ могат да бъдат последователни върхове на трапец. Отг. Не.

6.9. Точките $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$ са последователни върхове на успоредник. Намерете координатите на четвъртия връх. Отг. $D(-1, 1, 1)$

6.10. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуват ъгъл $\frac{2\pi}{3}$. Ако $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, да се пресметне: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ б) $(\vec{a} + \vec{b})^2$ в) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$
Отг. а) -6 б) 13 в) -11

6.11. Дадени са точките $A(4, 1, 5)$ и $B(-2, -2, 3)$. Намерете дължината на вектора $\overrightarrow{AB}$. Отг. 7

6.12. Точките $A(-4, 1, 1)$, $B(-5, -5, 3)$, $C(2, -3, 1)$, $D(1, 4, 0)$ са върхове на тетраедър. Покажете, че два срещуположни ръба на тетраедъра са перпендикулярни.

6.13. Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$: $A(2, -1, 3)$, $B(1, 1, 1)$, $C(0, 0, 5)$.

$$\text{Отг. } \sphericalangle A = \frac{\pi}{2}, \sphericalangle B = \sphericalangle C = \frac{\pi}{4}$$

6.14. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за които: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$. Да се намери дължината на векторното им произведение. Отг. 8

6.15. Да се намери лицето на $\triangle ABC$, ако $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$ Отг. 14

6.16. Да се намери обемът на тетраедъра $ABCD$, ако $A(3, -1, 5)$, $B(5, 2, 6)$, $C(-1, 3, 4)$, $D(7, 3, -1)$ Отг. 26

6.17. Докажете, че точките $A(5, 7, -2)$, $B(3, 1, -1)$, $C(9, 4, -4)$ и $D(1, 5, 0)$ лежат в една равнина.

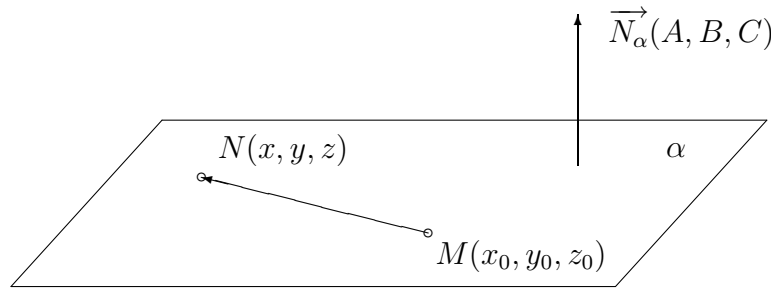
Глава 7

Равнина и права в пространството

Целта на тази глава е да запознае читателя с различните видове уравнения на равнина и права в пространството. След усвояване на материала вие ще можете да съставяте уравнения на равнина и на права, определени чрез дадени елементи; да определяте взаимното положение на равнини и прави; да решавате основни задачи за равнини и прави в пространството.

7.1 Уравнения на равнина

1. Уравнение на равнина α , определена чрез точка $M(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и нормален вектор $\vec{N}_\alpha(A, B, C)$.



Нека $N(x, y, z)$ е произволна точка от α . Векторът $\overrightarrow{MN}$ лежи в равнината α тогава и само тогава, когато векторите $\vec{N}_\alpha(A, B, C)$ и $\overrightarrow{MN}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ са перпендикулярни. Но от Глава 6 знаем, че два вектора са перпендикулярни тогава и само тогава, когато тяхното скалярно произведение е равно на нула. Следователно

$$N(x, y, z) \in \alpha \iff \vec{N}_\alpha \cdot \overrightarrow{MN} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

т.е. уравнението на равнината α е

$$\alpha : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (7.1)$$

2. Общо уравнение на равнина α .

В уравнението $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ разкриваме скобите и означаваме $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Получаваме

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0 \quad (7.2)$$

Теорема 7.1 *Всяка равнина в пространството има уравнение от вида (7.2) и всяко уравнение от вида (7.2), при допълнителното условие $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, е уравнение на равнина в пространството.*

3. Отрезково уравнение на равнина α .

Нека равнината α не е успоредна на никоя от координатните оси и не минава през началото на координатната система, т.е. коефициентите A, B, C и D в (7.2) са различни от нула. Тогава уравнението (7.2) можем да преобразуваме по следния начин: $Ax + By + Cz = -D$

$$\frac{x}{\left(\frac{-D}{A}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{-D}{B}\right)} + \frac{z}{\left(\frac{-D}{C}\right)} = 1$$

Полагаме

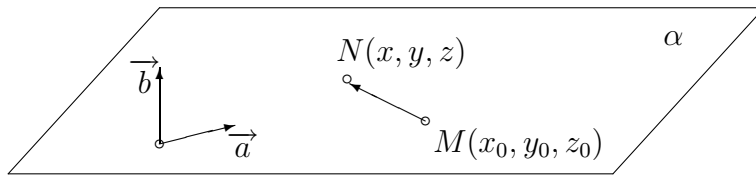
$$m = \frac{-D}{A}, \quad n = \frac{-D}{B}, \quad p = \frac{-D}{C}$$

и получаваме

$$\alpha : \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \quad (7.3)$$

($(m, n, p \neq 0$ са отрезите, които равнината отсича от координатните оси.)

4. Уравнение на равнина α , определена чрез точка $M(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и два неколинеарни вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, успоредни на равнината.



Нека $N(x, y, z)$ е произволна точка от α . Тогава векторите $\vec{MN}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са компланарни. Но от Глава 6 знаем, че необходимото и достатъчно условие три вектора да са компланарни е тяхното смесено произведение да бъде равно на нула. Следователно

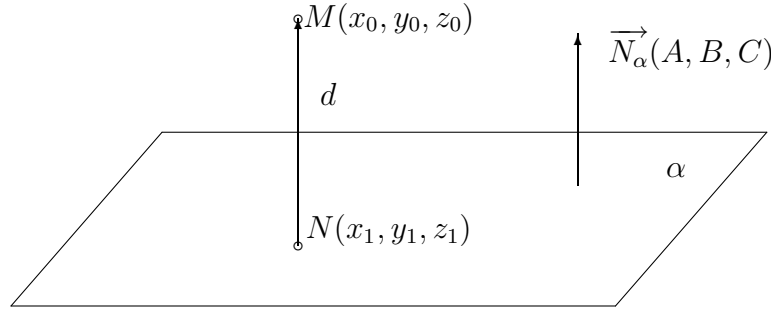
$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.4)$$

5. Уравнение на равнина α , определена чрез три различни точки $M(x_0, y_0, z_0)$, $N(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$, нележащи на една права.

Нека $\vec{a} = \vec{MN}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\vec{b} = \vec{MP}(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$. Прилагаме (7.4) и получаваме

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.5)$$

6. Разстояние от точка $M(x_0, y_0, z_0)$ до равнина $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$.



Да означим ортогоналната проекция на точката $M(x_0, y_0, z_0)$ върху равнината α с $N(x_1, y_1, z_1)$ и нека $d = |\overrightarrow{MN}|$. От това, че $N(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$ следва $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Следователно $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$.

Да пресметнем по два начина скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{N_\alpha}(A, B, C)$ и $\overrightarrow{NM}(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$. Отчитайки факта, че ъгълът между векторите $\overrightarrow{N_\alpha}$ и $\overrightarrow{NM}$ е 0 или π и прилагайки дефиницията за скаларно произведение на два вектора, получаваме

$$\overrightarrow{N_\alpha} \cdot \overrightarrow{NM} = \pm d \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

От формулата за скаларно произведение на два вектора имаме

$$\overrightarrow{N_\alpha} \cdot \overrightarrow{NM} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)$$

Приравняваме десните страни на горните две равенства и като използваме, че $D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$ получаваме

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (7.6)$$

Пример 7.1: Да се напише уравнението на равнина α , която минава през точката $A(3, -3, 1)$ и е перпендикулярна на вектора $\vec{a}(2, -1, -2)$.

Решение: Равнината е определена от точката $A(3, -3, 1)$ и нормален вектор $\overrightarrow{N_\alpha} = \vec{a}(2, -1, -2)$. От формула (7.1) следва, че уравнението на равнината е

$$\alpha : 2(x - 3) - (y + 3) - 2(z - 1) = 0 \quad \text{или} \quad 2x - y - 2z - 7 = 0.$$

Пример 7.2: Да се напише уравнението на равнина α , която минава през точката $A(2, -3, 2)$ и е успоредна на векторите $\vec{a}(3, -2, -1)$ и $\vec{b}(2, 1, -1)$.

Решение: Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не са колинеарни и според (7.4) уравнението на равнината е

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - 2 & y + 3 & z - 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha : 3x + y + 7z - 17 = 0.$$

Пример 7.3: Да се напише уравнението на равнина α , определена от точките $A(1, 3, 2)$, $B(3, 5, 3)$, $C(2, 2, -1)$.

Решение: Прилагаме формула (7.5) и получаваме

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha : 5x - 7y + 4z + 8 = 0.$$

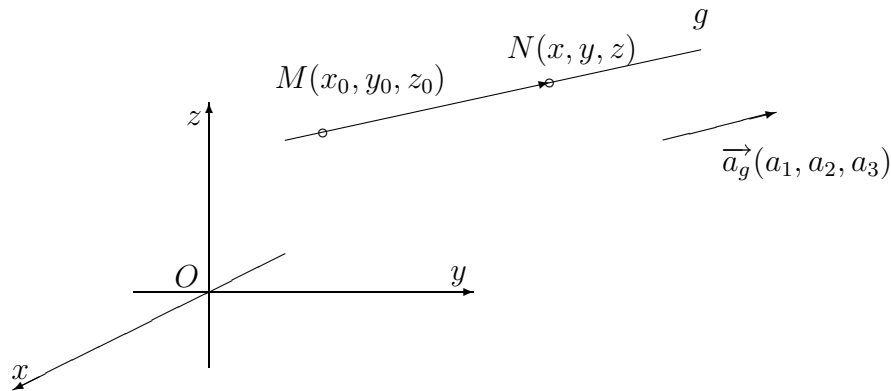
Пример 7.4: Да се намери разстоянието от точката $A(2, -2, 4)$ до равнината $\alpha : 2x + 2y - z - 14 = 0$.

Решение: Прилагаме формула (7.6) и получаваме

$$d = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 - 14|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-18|}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

7.2 Уравнения на права

1. Уравнения на права g , определена чрез точка $M(x_0, y_0, z_0) \in g$ и направляващ вектор $\vec{a}_g(a_1, a_2, a_3)$.



Нека $N(x, y, z)$ е произволна точка от g . Тогава векторите $\overrightarrow{MN}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ и $\vec{a}_g(a_1, a_2, a_3)$ са колинеарни. Това означава, че $\overrightarrow{MN} = t \cdot \vec{a}_g$, $-\infty < t < +\infty$. Следователно

$$g : \begin{cases} x = x_0 + a_1 \cdot t \\ y = y_0 + a_2 \cdot t \\ z = z_0 + a_3 \cdot t \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty \quad (7.7)$$

Уравненията (7.7) се наричат скалярно-параметрични уравнения на правата g .

2. Канонични уравнения на права g , определена от точка $M(x_0, y_0, z_0) \in g$ и направляващ вектор $\vec{a}_g(a_1, a_2, a_3)$.

$$g: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (7.8)$$

3. Уравнения на права g , определена чрез две различни точки $M(x_0, y_0, z_0)$ и $N(x_1, y_1, z_1)$.

Векторът $\vec{MN}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ е направляващ вектор за правата. Прилагаме предишната формула (7.8) и получаваме

$$g: \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \quad (7.9)$$

В уравненията (7.8) и (7.9) дробната черта не трябва да се възприема като знак за деление. Това е само едно символично означение. В знаменателите стоят координатите на направляващия вектор за правата и ако има нула в някой от знаменателите, това просто означава че съответната координата на вектора е нула.

Пример 7.5: Да се напишат каноничните уравнения на правата g , която минава през точката $A(1, -2, 3)$ и има направляващ вектор $\vec{a}_g(3, -1, 2)$.

Решение: Прилагаме формула (7.8):

$$g: \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z - 3}{2}.$$

Пример 7.6: Да се напишат уравненията на правата g , която минава през точките $A(3, -4, 1)$ и $B(1, -5, 4)$.

Решение: Векторът $\vec{AB}(-2, -1, 3)$ е направляващ вектор за правата и нейните канонични уравнения са

$$g: \frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 4}{-1} = \frac{z - 1}{3}.$$

Пример 7.7: Да се напишат скалярно-параметричните уравнения на правата g , която минава през точката $A(2, -2, 3)$ и е перпендикулярна на равнината $\alpha: 3x + 2y - z + 11 = 0$.

Решение: Тъй като правата g е перпендикулярна на равнината α , то нормалният вектор на равнината $\vec{N}_\alpha(3, 2, -1)$ е направляващ вектор за правата. Следователно скалярно-параметричните уравнения са

$$g: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$$

Пример 7.8: Да се напише уравнението на равнината α , определена от точката $A(2, 1, 3)$ и правата $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$.

Решение: Направляващ вектор на правата p е векторът $\vec{a}_p(1, 3, -1)$ и точката $B(1, -2, 0)$ лежи на правата. Намираме координатите на вектор $\vec{AB}(-1, -3, -3)$. Следователно можем да напишем уравнението на равнината по формула (7.4)

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: 3x - y - 5 = 0.$$

Пример 7.9: Да се напише уравнението на равнината α , определена от успоредните прави

$$p: \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{3}$$

и

$$q: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}.$$

Решение: Направляващ вектор на правата p е векторът $\vec{a}_p(2, 1, 3)$, а точката $A(-2, -1, 3)$ лежи на правата p . Точката $B(1, 0, -1)$ лежи на правата q . Намираме координатите на вектор $\vec{AB}(3, 1, -4)$. Сега можем да напишем уравнението на равнината, използвайки формула (7.4)

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: 7x - 17y + z - 6 = 0.$$

7.3 Взаимни положения на прави и равнини

1. Взаимни положения на две равнини

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{и} \quad \beta: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

а) Ако нормалните вектори $\vec{N}_\alpha(A, B, C)$ и $\vec{N}_\beta(A_1, B_1, C_1)$ не са успоредни, т.е. няма пропорционалност между съответните им координати, то двете равнини се пресичат.

б) Ако $\vec{N}_\alpha = k\vec{N}_\beta$, но $D \neq kD_1$, то двете равнини са успоредни.

в) Ако $\vec{N}_\alpha = k\vec{N}_\beta$ и $D = kD_1$, то двете равнини се сливат.

2. Пробод на права

$$g : \begin{cases} x = x_0 + a_1.t \\ y = y_0 + a_2.t \\ z = z_0 + a_3.t \end{cases} \quad (7.10)$$

с равнина

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0. \quad (7.11)$$

За да намерим пробода на правата g с равнината α , трябва да решим системата от уравненията (7.10) и (7.11). За тази цел заместваме x, y, z от (7.10) в уравнението на равнината (7.11) и получаваме следното линейно уравнение за параметъра t

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

- Ако това уравнение има едно решение t_0 , то правата пробжда равнината и пробода намираме, като заместим t в (7.10) с t_0 .

- Ако това уравнение няма решение, то правата и равнината нямат общи точки, т.е. тя е успоредна на равнината.

- Ако това уравнение има безброй много решения, то правата лежи в равнината.

3. Взаимни положения на две прави

$$p : \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad \text{и} \quad g : \frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3}$$

Две прави се наричат **кръстосани**, ако не лежат в една равнина.

Разглеждаме векторите $\vec{a}_p(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{a}_g(b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{MN}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

а) Ако

$$(\vec{a}_p, \vec{a}_g, \vec{MN}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то правите са кръстосани.

б) Ако

$$(\vec{a}_p, \vec{a}_g, \vec{MN}) = 0,$$

то правите лежат в една равнина.

- Ако векторите $\vec{a}_p$ и $\vec{a}_g$ не са успоредни, то правите се пресичат.

- Ако векторите $\vec{a}_p$ и $\vec{a}_g$ са успоредни, но векторът $\vec{MN}$ не е успореден на тях, то правите са успоредни.

- Ако векторите $\vec{a}_p$, $\vec{a}_g$ и $\overrightarrow{MN}$ са успоредни, то правите се сливат.

Пример 7.10: Да се намери пробода A на правата

$$g: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

с равнината $\alpha: x + 2y - z - 12 = 0$.

Решение: Координатите на прободната точка са решения на системата

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 2t \\ x + 2y - z - 12 = 0 \end{cases}$$

Заместваме $x = 2 + 3t$, $y = -1 + t$, $z = 2 - 2t$ в уравнението на равнината и получаваме

$$\begin{aligned} 2 + 3t + 2(-1 + t) - (2 - 2t) - 12 &= 0 \\ 7t - 14 &= 0 \quad \text{или} \quad t = 2. \end{aligned}$$

Заместваме $t = 2$ в уравненията на правата и получаваме координатите на пробода $A(8, 1, -2)$.

Пример 7.11: Да се намери пробода A на правата

$$g: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}$$

с равнината $\alpha: x + y - 2z + 15 = 0$.

Решение: От каноничните уравнения на правата g получаваме скаларно-параметричните уравнения

$$g: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

След това решаваме както Пример 7.10 (направете това сами) и получаваме $A(9, -2, 11)$.

Пример 7.12: Да се определи взаимното положение на правите p и g :

$$\begin{aligned} p: \frac{x-1}{2} &= \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4} \\ g: \frac{x-6}{3} &= \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1} \end{aligned}$$

Решение: Точката $M(1, 7, 3)$ е точка от правата p и направляващ вектор на същата права е векторът $\vec{a}_p(2, 1, 4)$. Аналогично, точката $N(6, -1, -2)$ е точка от правата g и направляващ вектор на тази права е векторът $\vec{a}_g(3, -2, 1)$. Векторът

$\overrightarrow{MN}$ има координати $\overrightarrow{MN}(5, -8, -5)$.

Пресмятаме смесеното произведение на тези три вектора

$$(\overrightarrow{a_p}, \overrightarrow{a_g}, \overrightarrow{MN}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Следователно двете прави лежат в една равнина. Тъй като направляващите им вектори не са колинеарни, то двете прави се пресичат.

ЗАДАЧИ

7.1. Да се напише уравнението на равнина α , минаваща по правата

$$g: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$$

и перпендикулярна на равнината $\beta: 2x + y - 3z + 2 = 0$.

Решение: Точката $M(-1, 1, 0)$ е точка от правата g и направляващ вектор на същата права е векторът $\overrightarrow{a_g}(2, -1, 1)$. Нормалният вектор на равнината β е успореден на равнината α . Следователно равнината α е определена от точката M и двата вектора $\overrightarrow{a_g}$ и $\overrightarrow{N}_\beta$. Прилагаме формула (7.4)

$$\alpha: \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: x + 4y + 2z - 3 = 0.$$

7.2. Да се напише уравнението на равнина α , която минава през точката $M(2, -1, 5)$ и е перпендикулярна на равнините $\beta: 3x - 2y + z - 1 = 0$ и $\gamma: 5x - 4y + 3z - 5 = 0$.

Решение: От това, че равнината α е перпендикулярна на двете равнини, следва че нормалните им вектори са компланарни с тази равнина. Следователно равнината α е определена от точката M и двата нормални вектора. Прилагаме формула (7.4) и получаваме

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: x + 2y + z - 5 = 0.$$

7.3. Да се напише уравнението на симетралната равнина на отсечката AB , където $A(2, -2, 5)$, $B(4, -6, -3)$.

Решение: Симетрална равнина на дадена отсечка е равнината, която минава през средата на отсечката и е перпендикулярна на нея.

Средата O на отсечката AB има координати

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_O = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_O = \frac{z_A + z_B}{2}$$

$$\implies x_O = 3, \quad y_O = -4, \quad z_O = 1.$$

Търсената равнина минава през точката $O(3, -4, 1)$ и е перпендикулярна на $\overrightarrow{AB}(2, -4, -8)$. Следователно тя има уравнение

$$2(x - 3) - 4(y + 4) - 8(z - 1) = 0 \quad \text{или} \quad x - 2y - 4z - 7 = 0.$$

7.4. Да се напишат каноничните уравнения на пресечницата g на равнините α и β .

$$g : \begin{cases} \alpha : x - 3y - z - 20 = 0 \\ \beta : 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Решение: Направляващият вектор на пресечницата е колинеарен на векторното произведение на нормалните вектори $\overrightarrow{N}_\alpha(1, -3, -1)$ и $\overrightarrow{N}_\beta(2, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{N}_\alpha \times \overrightarrow{N}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}.$$

Точка от правата получаваме като намерим едно решение на системата

$$\begin{cases} x - 3y - z - 20 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

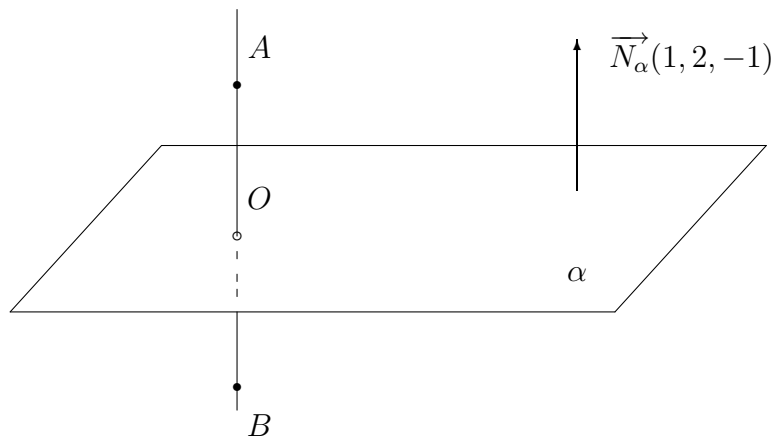
Ако положим например $z = 1$, получаваме $x = 3$, $y = -6$.

Следователно каноничните уравнения са:

$$g : \frac{x - 3}{4} = \frac{y + 6}{-1} = \frac{z - 1}{7}.$$

7.5. Да се намерят координатите на точка B , ортогонално-симетрична на точката $A(1, 1, -2)$ спрямо равнината $\alpha : x + 2y - z - 17 = 0$.

Решение : През точката A прекарваме права, перпендикулярна на равнината α . След това намираме пробода O на тази права с равнината. Прободът е среда на отсечката AB и лесно намираме координатите на точката B , като знаем средата и другия край.



Уравнението на правата, минаваща през точката $A(1, 1, -2)$ и перпендикулярна на $x + 2y - z - 17 = 0$ е

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}.$$

Пресечната точка на правата и равнината е решението на системата

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1} \\ x + 2y - z - 17 = 0 \end{cases}$$

Заместваме $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = -2 - t$ в уравнението на равнината $x + 2y - z - 17 = 0$ и получаваме $t = 2$. Следователно координатите на пробода O са

$$x = 3, \quad y = 5, \quad z = -4.$$

Точката $O(3, 5, -4)$ е среда на отсечката, свързваща точката A и нейната симетрична B . Тогава

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_O = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_O = \frac{z_A + z_B}{2}$$

или

$$3 = \frac{1 + x_B}{2}, \quad 5 = \frac{1 + y_B}{2}, \quad -4 = \frac{-2 + z_B}{2}.$$

Следователно

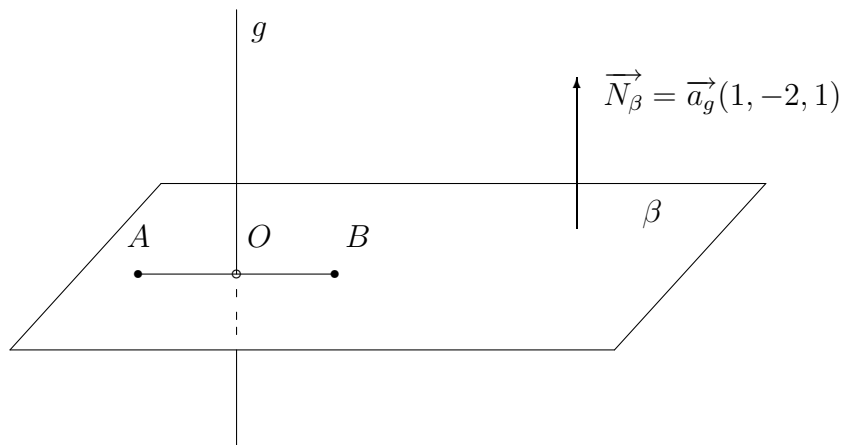
$$x_B = 5, \quad y_B = 9, \quad z_B = -6.$$

Симетричната точка е $B(5, 9, -6)$.

7.6. Да се намерят координатите на точка B , симетрична на точката $A(2, 1, 4)$ спрямо правата

$$g: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

Решение : През точката A прекарваме равнина β , перпендикулярна на дадената права. Намираме пробода O на тази права с равнината. Тъй като прободът е среда на отсечката AB , то лесно намираме координатите на точката B .



Уравнението на равнината, минаваща през точката $A(2, 1, 4)$ и перпендикулярна на правата g , е

$$\beta: (x - 2) - 2(y - 1) + z - 4 = 0$$

или

$$\beta: x - 2y + z - 4 = 0.$$

Координатите на пресечната точка O на правата и равнината получаваме от системата

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + t \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Заместваме $x = 2 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = 2 + t$ в уравнението $x - 2y + z - 4 = 0$ и получаваме $t = 1$. Следователно координатите на O са

$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = 3.$$

Точката $O(3, 1, 3)$ е среда на отсечката, свързваща точката A и нейната симетрична точка B и това означава, че нейните координати се получават като средноаритметично от съответните координати на крайните точки, т.е.

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_O = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_O = \frac{z_A + z_B}{2},$$

или

$$3 = \frac{2 + x_B}{2}, \quad 1 = \frac{1 + y_B}{2}, \quad 3 = \frac{4 + z_B}{2}.$$

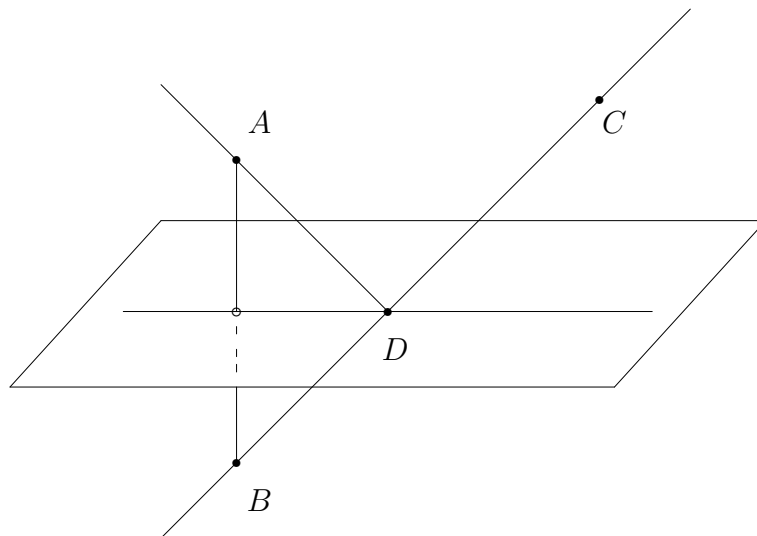
Следователно

$$x_B = 4, \quad y_B = 1, \quad z_B = 2,$$

т.е. симетричната точка е $B(4, 1, 2)$.

7.7. Светлинен лъч минава през точката $A(1, 1, -2)$ и след отразяването си от равнината $\alpha: x + 2y - z - 17 = 0$ минава през точката $C(-1, 15, 18)$. Напишете уравненията на падащия и отразения лъч.

Решение : От физиката знаем, че ъгълът на падане е равен на ъгъла на отражение. Следователно симетричната точка B на точката A спрямо равнината α , лежи на продължението на отразения лъч и тя има координати $x_B = 5$, $y_B = 9$, $z_B = -6$ (виж зад. 7.5).



Отразеният лъч минава през точките C и B и следователно има уравнения: $x = 5 + t$, $y = 9 - t$, $z = -6 - 4t$. Прободът на отразения лъч и равнината α е точката на отражение

$$D(1, 13, 10).$$

Векторът $\overrightarrow{AD}$ има координати $\overrightarrow{AD}(0, 12, 12)$. Следователно падащият лъч, определен от точките D и A , има уравнения

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-13}{12} = \frac{z-10}{12}.$$

Всяка права, която пресича две кръстосани прави, се нарича **трансверзала**. Ос на две кръстосани прави се нарича трансверзалата, която е перпендикулярна на двете прави.

7.8. Напишете уравнението на оста c на кръстосаните прави

$$a: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$$

$$b: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Решение : Задачата може да се реши по няколко начина. Ще изложим два от тях.

Направляващият вектор на търсената права c е перпендикулярен на векторите $\vec{a}(1, 2, -1)$ и $\vec{b}(-7, 2, 3)$. Следователно той е колинеарен на вектора

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 16\vec{k}.$$

За направляващ вектор избираме $\vec{c}(2, 1, 4) = \frac{1}{4}(\vec{a} \times \vec{b})$.

Първи начин: Намираме уравнението на равнина α , минаваща по правата b и успоредна на вектор $\vec{c}$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ -7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\alpha: 5x + 34y - 11z - 38 = 0.$$

Намираме пробода M на правата $a: \{x = t + 7, y = 2t + 3, z = -t + 9\}$ с равнината $\alpha: 5x + 34y - 11z - 38 = 0$.

$$\implies 5(t + 7) + 34(2t + 3) - 11(-t + 9) - 38 = 0.$$

Получаваме $t = 0$ и следователно

$$M(7, 3, 9).$$

Оста има уравнения:

$$c: \frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{4}$$

Втори начин: След като намерим уравнението на равнината α , намираме уравнението на равнина β , минаваща по правата a и успоредна на вектор $\vec{c}$

$$\beta: \begin{vmatrix} x-7 & y-3 & z-9 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\beta: 3x - 2y - z - 6 = 0.$$

Пресечницата на равнините α и β е търсената права. Следователно

$$\vec{a}_c = \vec{N}_\alpha \times \vec{N}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 34 & -11 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -56\vec{i} - 28\vec{j} - 112\vec{k} = -28(2\vec{i} + 1\vec{j} + 4\vec{k})$$

Точка от правата получаваме като решим системата

$$\begin{cases} 5x + 34y - 11z - 38 = 0 \\ 3x - 2y - z - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Получаваме $N(1, 0, -3) \in c$. Следователно оста има уравнения

$$c: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{4}$$

Задачи за самостоятелна работа:

7.9. Да се напише уравнението на равнината α , която минава през точката $A(2, -3, 1)$ и е перпендикулярна на вектора $\vec{N}_\alpha(2, 1, -2)$.

$$\text{Отг. } \alpha : 2x + y - 2z + 1 = 0$$

7.10. Да се напише уравнението на равнината α , която минава през точката $M(3, -1, -2)$ и е успоредна на равнината $\beta : x - 3y + 2z - 5 = 0$.

$$\text{Отг. } \alpha : x - 3y + 2z - 2 = 0$$

7.11. Да се напише уравнението на равнината α , която минава през точката $A(2, -3, 2)$ и е успоредна на векторите $\vec{a}(1, -1, 4)$ и $\vec{b}(2, 1, -1)$.

$$\text{Отг. } \alpha : x - 3y - z - 9 = 0$$

7.12. Да се напише уравнението на равнината α , определена от точките $A(1, 3, 2)$, $B(10, 8, 3)$ и $C(6, 6, -1)$

$$\text{Отг. } \alpha : 9x - 16y - z + 41 = 0$$

7.13. Да се напише уравнението на равнината α , определена от точката $A(2, 1, 3)$ и правата $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$.

$$\text{Отг. } \alpha : 3x - y - 5 = 0$$

7.14. Да се напише уравнението на равнината α , определена от успоредните прави

$$p : \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{3} \quad \text{и} \quad q : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}.$$

$$\text{Отг. } \alpha : 7x - 17y + z - 6 = 0$$

7.15. Да се напише уравнението на равнината α , определена от пресичащите се прави

$$p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1} \quad \text{и} \quad q : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{3}.$$

$$\text{Отг. } \alpha : 3x - 7y - z - 5 = 0$$

7.16. Да се напише уравнението на равнината α , минаваща по правата

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$$

и перпендикулярна на равнината $\beta : 3x + y - z + 2 = 0$.

$$\text{Отг. } \alpha : x - 6y - 3z - 11 = 0$$

7.17. Да се напише уравнението на равнината α , която минава през точката $M(-1, 3, 2)$ и е перпендикулярна на равнините $\beta : x - 3y + z - 1 = 0$ и $\gamma : 2x + y + z - 5 = 0$.

$$\text{Отг. } \alpha : 4x - y - 7z + 21 = 0$$

7.18. Да се напише уравнението на симетралната равнина на отсечката $AB : A(1, -2, 3), B(5, -4, -1)$.

$$\text{Отг. } \alpha : 2x - y - 2z - 7 = 0$$

7.19. Да се напишат каноничните уравнения на правата

$$g : \begin{cases} \alpha : 2x + 3y + 2z + 8 = 0 \\ \beta : x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Отг. } g : \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z}{5}$$

7.20. Да се определи взаимното положение на правите p и g :

а)

$$p : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+7}{2}, \quad g : \frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+9}{2}$$

б)

$$p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+3}{1}, \quad g : \frac{x+17}{3} = \frac{y+11}{6} = \frac{z}{3}$$

в)

$$p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}, \quad g : \frac{x-3}{-5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-4}{-3}$$

Отг. а) пресичат се б) успоредни в) кръстосани

7.21. Да се намерят координатите на точка, ортогонално симетрична на точката $A(1, 3, -4)$ спрямо равнината $\alpha : 3x + y - 2z = 0$. Отг. $(-5, 1, 0)$

7.22. Да се намери разстоянието от точката $A(7, 9, 7)$ до правата $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. Отг. $\sqrt{22}$

7.23. Да се намерят координатите на точка, симетрична на точката $A(4, 3, 10)$ спрямо правата

$$g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}.$$

Отг. $(2, 9, 6)$

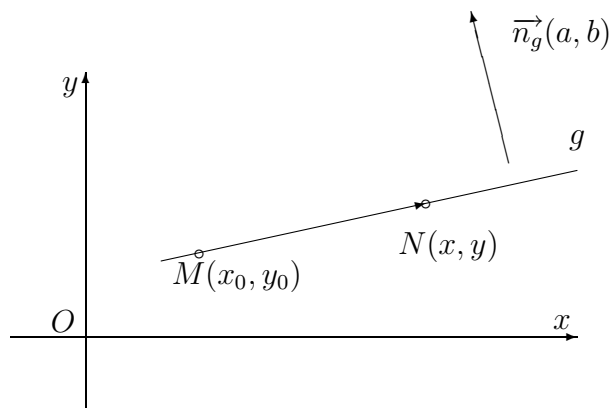
Глава 8

Права в равнината

В тази глава са представени различните видове уравнения на права в равнината. След усвояване на материала вие ще умеете да решавате редица геометрични задачи, прилагайки методите на аналитичната геометрия.

1. Уравнение на права, определена от точка и нормален вектор

Нека точката $M_0(x_0, y_0)$ лежи на g , а векторът $\vec{n}_g(a, b)$ е перпендикулярен на g .



Нека $N(x, y)$ е произволна точка от g . Тогава

$$N(x, y) \in g \Leftrightarrow \vec{n}_g(a, b) \perp \overrightarrow{MN}(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow \vec{n}_g \cdot \overrightarrow{MN} = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Следователно уравнението на правата g е

$$g : a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad (8.1)$$

2. Общо уравнение на права

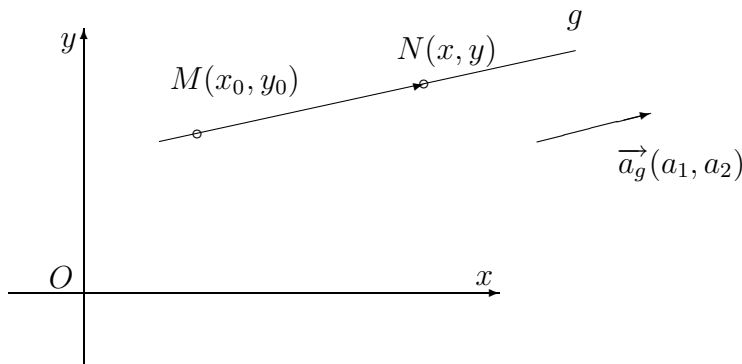
Разкриваме скобите в (8.1) и полагаме $c = -(ax_0 + by_0)$. Получаваме

$$g : ax + by + c = 0, \quad (8.2)$$

където a и b не са едновременно нули. Ако $a^2 + b^2 = 1$ уравнението (8.2) се нарича **нормално** уравнение на правата.

Теорема 8.1 Всяка права в равнината има уравнение от вида (8.2) и всяко уравнение от вида (8.2), при допълнителното условие $a^2 + b^2 \neq 0$, е уравнение на права в равнината.

3. Уравнения на права, определена от точка и направляващ вектор

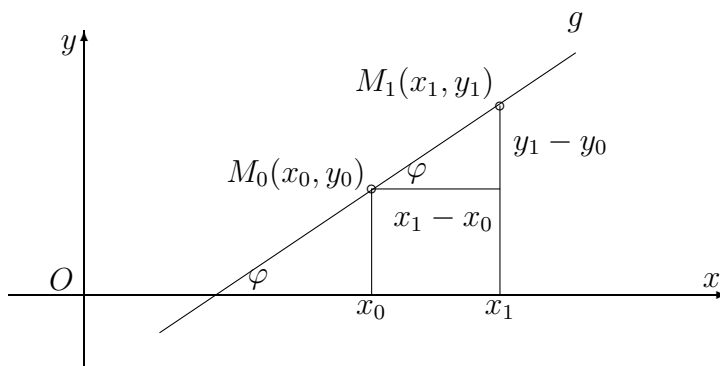


Нека $N(x, y)$ е произволна точка от g . Тогава векторите $\overrightarrow{MN} (x - x_0, y - y_0)$ и $\vec{a}_g(a_1, a_2)$ са колинеарни. Това означава, че $\overrightarrow{MN} = t \cdot \vec{a}_g$, където $-\infty < t < +\infty$ е параметър. Следователно

$$g : \begin{cases} x = x_0 + a_1 \cdot t \\ y = y_0 + a_2 \cdot t \end{cases} \quad (8.3)$$

Уравненията (8.3) се наричат скаларно-параметрични уравнения на правата g .

4. Уравнения на права през две точки



От (8.3) следва, че правата g , която минава през точките $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, т.е. $\vec{a}_g = \overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, има следните уравнения:

а) скаларно-параметрични уравнения

$$g : \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \quad (8.4)$$

б) канонично уравнение

$$g : \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad (8.5)$$

Ако правата g минава през точката $M_0(x_0, y_0)$ и е успоредна на оста Ox или оста Oy , от (8) следва, че тя има съответно уравнения $y = y_0$ и $x = x_0$.

5. Уравнение на права по точка и ъглов коефициент

Нека правата g не е успоредна на ординатната ос, минава през точката $M_0(x_0, y_0)$ и сключва с положителната посока на абсцисната ос ориентиран ъгъл φ . Тогава уравнението (8.5) можем да преобразуваме във вида

$$g : y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Но

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \varphi$$

Означаваме $k = \operatorname{tg} \varphi$ - **ъглов коефициент** на правата. Така получаваме

$$g : y - y_0 = k(x - x_0) \quad (8.6)$$

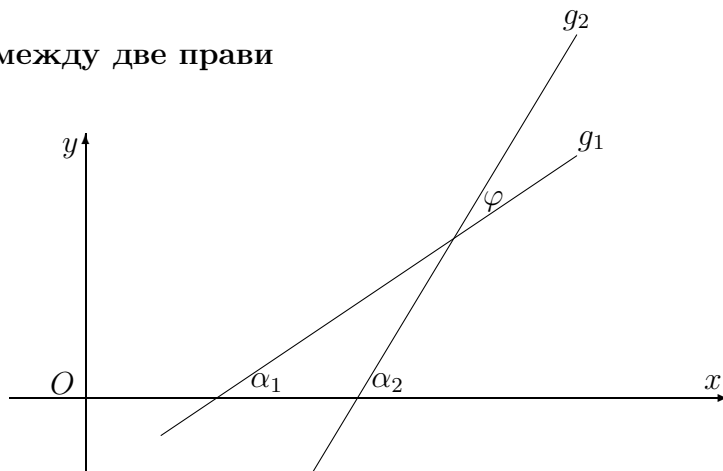
6. Уравнение на права с ъглов коефициент

След разкриване на скобите в (8.6) и полагането $n = y_0 - kx_0$ получаваме

$$g : y = kx + n, \quad (8.7)$$

което се нарича **декартово уравнение**. Числото n е отреза, който правата отсича от ординатната ос.

7. Ъгъл между две прави



Нека правите $g_1 : y = k_1x + n_1$ и $g_2 : y = k_2x + n_2$ се пресичат и нека означим с φ ъгъла, на който трябва да бъде завъртяна правата g_1 в положителна посока, докато се слее с правата g_2 .

Тогава

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

и като използваме формулата

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}$$

получаваме

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (8.8)$$

8. Условия за успоредност и за перпендикулярност на две прави

Очевидно е, че две прави $g_1 : y = k_1x + n_1$ и $g_2 : y = k_2x + n_2$ са успоредни тогава и само тогава, когато имат равни ъглови коефициенти, т.е.

$$g_1 \parallel g_2 \iff k_1 = k_2 \quad (8.9)$$

Ако двете прави са перпендикулярни, тогава са перпендикулярни и нормалните им вектори $n_{g_1}(k_1, -1)$ и $n_{g_2}(k_2, -1)$. Следователно

$$g_1 \perp g_2 \iff n_{g_1} \perp n_{g_2} \iff n_{g_1} \cdot n_{g_2} = 0 \iff k_1 \cdot k_2 = -1 \quad (8.10)$$

9. Разстояние от точка до права

За разстоянието d от точката $M_0(x_0, y_0)$ до правата $g : ax + by + c = 0$ е в сила следната формула

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (8.11)$$

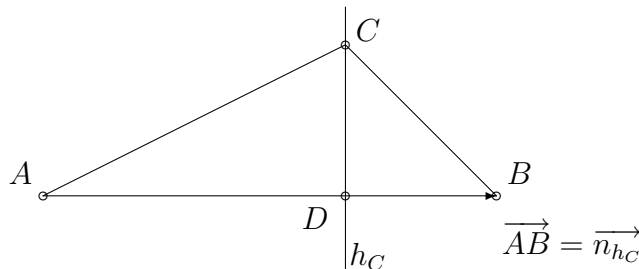
Извеждането на формулата е напълно аналогично на това за разстояние от точка до равнина. *Направете го сами.*

Всяка права разделя равнината на две полуравнини. Ако $ax_0 + by_0 + c > 0$, точката $M_0(x_0, y_0)$ лежи в онази полуравнина, определена от правата g , към която сочи нормалният вектор $\vec{n}(a, b)$. Ако пък $ax_0 + by_0 + c < 0$, точката $M_0(x_0, y_0)$ се намира в другата полуравнина.

ЗАДАЧИ

8.1 Точките $A(1, 1)$, $B(4, 5)$ и $C(3, -2)$ са върхове на $\triangle ABC$. Напишете уравнението на височината h_C през върха C и намерете нейната дължина.

Решение:



Намираме уравнението на AB . Имаме $\vec{AB}(3, 4)$ и

$$AB : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4}, \quad \text{т.е. } AB : 4x - 3y - 1 = 0.$$

Векторът $\vec{AB}(3, 4)$ е нормален за h_C и уравнението на височината е

$$h_C : 3(x-3) + 4(y+2) = 0, \quad \text{т.е. } h_C : 3x + 4y - 1 = 0.$$

За да намерим дължината на височината не е необходимо да намираме пресечната и точка D с правата AB , а използваме формула (8.10) за разстоянието от точката C до AB

$$|CD| = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{17}{5}$$

8.2 Намерете ортоцентъра и медицентъра на $\triangle ABC$ с върхове $A(-4, 2)$, $B(2, -5)$, и $C(5, 0)$.

Решение: Намираме уравненията на височините h_A и h_B през върховете A и B . Имаме $\vec{n}_{h_A} = \vec{BC} = (3, 5)$, следователно

$$h_A : 3(x + 4) + 5(y - 2) = 0, \quad h_A : 3x + 5y + 2 = 0.$$

Аналогично $\vec{n}_{h_B} = \vec{AC} = (9, -2)$ и

$$h_B : 9x - 2y - 28 = 0.$$

Ортоцентърът H е пресечната точка на h_A и h_B .

$$\begin{cases} 3x + 5y + 2 = 0 \\ 9x - 2y - 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{8}{3}, -2\right).$$

Координатите на медицентъра $G(x_G, y_G)$ пресмятаме по формулите

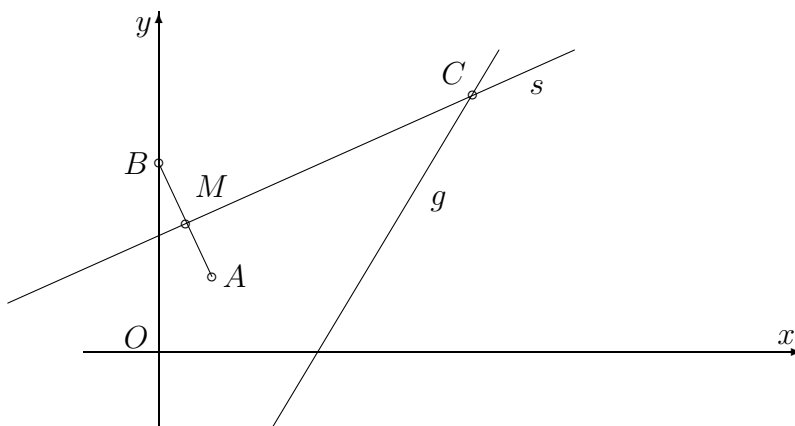
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Следователно

$$x_G = \frac{-4 + 2 + 5}{3} = 1, \quad y_G = \frac{2 - 5 + 0}{3} = -1.$$

8.3 Точките $A(2, 4)$ и $B(0, 6)$ са върхове на равнобедрен триъгълник $\triangle ABC$ ($AC = BC$). Намерете третия връх C , ако той лежи на правата $g : 2x - y - 6 = 0$.

Решение:



Третият връх C е пресечна точка на симетралата s на отсечката AB и правата g . Нека M е среда на AB . Тогава $M(1, 5)$. Векторът $\overrightarrow{AB}(-2, 2)$ е нормален за s . Следователно

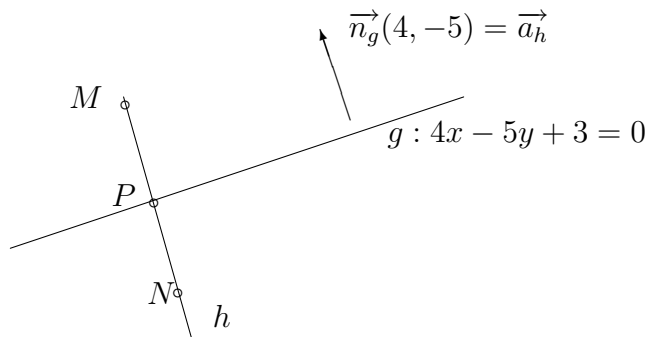
$$s : -2(x - 1) + 2(y - 5) = 0$$

$$s : x - y + 4 = 0$$

Решаваме системата от уравненията на s и g и получаваме $C(10, 14)$.

8.4 Да се намери точка N , ортогонално симетрична на точката $M(-6, 4)$ относно правата $g : 4x - 5y + 3 = 0$.

Решение:



През точката M построяваме права h , перпендикулярна на g . Нормалният вектор $\vec{n}_g(4, -5)$ на g служи за направляващ на h . Следователно $\vec{a}_h(4, -5)$, а $\vec{n}_h(5, 4)$. Тогава $h : 5(x + 6) + 4(y - 4) = 0$, т.е. $h : 5x + 4y + 14 = 0$. Точката P е ортогонална проекция на точката M върху правата g и е пресечна точка на правите g и h

$$\begin{cases} 4x - 5y + 3 = 0 \\ 5x + 4y + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow P(-2, -1).$$

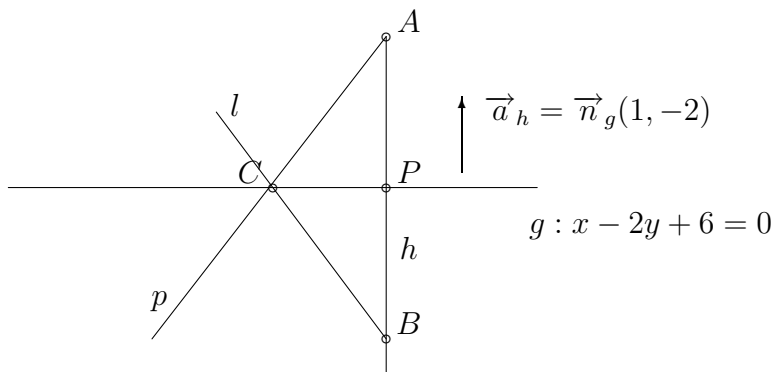
Тъй като P е среда на отсечката MN , то

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{x_M + x_N}{2}, & y_P &= \frac{y_M + y_N}{2}, \\ -4 &= -6 + x_N, & -2 &= 4 + y_N \end{aligned}$$

и следователно $x_N = 2$, $y_N = -6$.

8.5 През точката $A(8, 12)$ минава светлинен лъч, който се отразява от правата $g : x - 2y + 6 = 0$ в точката $C(4, 5)$. Да се намерят уравненията на падащия и отразения лъч.

Решение:



Падащият лъч p е определен от двете точки $A(8, 12)$ и $C(4, 5)$. Направляващ вектор за p е векторът $\overrightarrow{CA}(4, 7)$. Следователно

$$p : \frac{x-8}{4} = \frac{y-12}{7}, \implies p : 7x - 4y - 8 = 0$$

Отразеният лъч ще минава през точка B – ортогонално-симетрична на A спрямо g . Построяваме права h , минаваща през A и перпендикулярна на g . Имаме $\vec{a}_h = \vec{n}_g(1, -2)$. Следователно $h : 2x + y - 28 = 0$. Намираме координатите на пресечната точка P на h и g от системата

$$\begin{cases} 2x + y - 28 = 0 \\ x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$$

Получаваме $P(10, 8)$. Тъй като P е среда на отсечката AB , то:

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_P = \frac{y_A + y_B}{2},$$

$$x_B = 2x_P - x_A, \quad y_B = 2y_P - y_A,$$

откъдето $B(12, 4)$. Уравнението на отразения лъч l написваме по точките $B(12, 4)$ и $C(4, 5)$

$$l : x + 8y - 44 = 0$$

8.6 Да се намери уравнението на ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$, ако са дадени уравненията на страните му $AB : x + 7y - 7 = 0$, $BC : 9x - 17y + 17 = 0$, $AC : x - y - 7 = 0$.

Решение: Пресичайки две по две дадените три прави, за върховете на $\triangle ABC$ получаваме

$$A(7, 0), \quad B(0, 1), \quad C(17, 10).$$

Тогава

$$\overrightarrow{AB}(-7, 1), \implies |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

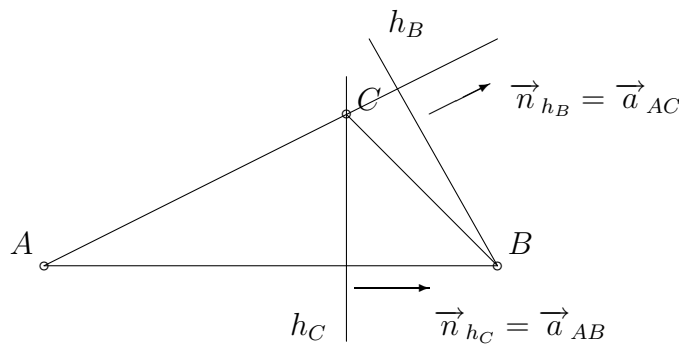
$$\overrightarrow{AC}(10, 10), \implies |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 2\sqrt{50}$$

и лесно забелязваме, че векторите $\overrightarrow{AB}(-7, 1)$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ имат равни дължини. Следователно тяхната сума ще бъде направляващ вектор за търсената ъглополовяща $\vec{a}_l(-2, 6)$, т.е.

$$l : \frac{x-7}{-1} = \frac{y-0}{3}, \quad \text{т.е. } l : 3x + y - 21 = 0.$$

8.7 Дадени са координатите на върха $A(-2, -4)$ и уравненията на височините $h_B : x - y - 5 = 0$ и $h_C : 2x - y + 3 = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на другите два върха на триъгълника.

Решение:



Нормалният вектор на h_C служи за направляващ вектор на правата AB . Следователно

$$AB : \frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{-1}, \implies AB : x + 2y + 10 = 0$$

Пресечната точка на AB и h_B е точката B .

$$\begin{cases} x + 2y + 10 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \end{cases} \implies B(0, -5)$$

Нормалният вектор на h_B служи за направляващ вектор на правата AC . Следователно

$$AC : \frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{-1}, \implies AC : x + y + 6 = 0$$

Пресечната точка на AC и h_C е точката C .

$$\begin{cases} x + y + 6 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \implies C(-3, -3)$$

8.8 Дадени са уравненията на страната $AB : x + 4y - 13 = 0$ и на височините $h_A : x + 3 = 0$ и $h_B : 3x - y = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.

Решение: Пресечните точки на двете височини с правата AB са върховете A и B на $\triangle ABC$:

$$\begin{cases} AB : x + 4y - 13 = 0 \\ h_A : x + 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases} \implies A(-3, 4)$$

$$\begin{cases} AB : x + 4y - 13 = 0 \\ h_B : 3x - y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \implies B(1, 3)$$

Нормалният вектор на h_B служи за направляващ вектор на правата AC . Следователно

$$AC : \frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{-1}, \implies AC : x + 3y - 9 = 0.$$

Нормалният вектор на h_A служи за направляващ вектор на правата BC . Следователно

$$BC : \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0}, \implies BC : y - 3 = 0.$$

$$\begin{cases} AC : x + 3y - 9 = 0 \\ BC : y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \implies C(0, 3)$$

8.9 Дадени са уравненията на страните $AB : x + 3y + 8 = 0$ и $BC : x + 2y + 6 = 0$ на $\triangle ABC$ и ортоцентърът му $H(-2, -9)$. Намерете координатите на върховете на

триъгълника.

Решение:

$$\left| \begin{array}{l} AB : x + 3y + 8 = 0 \\ BC : x + 2y + 6 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -2 \end{array} \right. \Rightarrow B(-2, -2)$$

Нормалният вектор на AB служи за направляващ вектор на височината h_C . Следователно

$$h_C : \frac{x+2}{1} = \frac{y+9}{3}, \Rightarrow h_C : 3x - y - 3 = 0$$

Върхът C е пресечна точка на h_C и BC .

$$\left| \begin{array}{l} BC : x + 2y + 6 = 0 \\ h_C : 3x - y - 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -3 \end{array} \right. \Rightarrow C(0, -3)$$

Нормалният вектор на BC служи за направляващ вектор на височината h_A . Следователно

$$h_A : \frac{x+2}{1} = \frac{y+9}{2}, \Rightarrow h_A : 2x - y - 5 = 0$$

Върхът A е пресечна точка на h_A и AB .

$$\left| \begin{array}{l} AB : x + 3y + 8 = 0 \\ h_A : 2x - y - 5 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -3 \end{array} \right. \Rightarrow A(1, -3).$$

8.10 Дадени са уравненията на страните $AB : x - 4y + 34 = 0$, $AC : 2x + y - 4 = 0$ и на медианата $m_B : x + y + 4 = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете уравнението на третата страна на триъгълника.

Решение: Върхът A е пресечна точка на правите AB и AC .

$$\left| \begin{array}{l} AB : x - 4y + 34 = 0 \\ AC : 2x + y - 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 8 \end{array} \right. \Rightarrow A(-2, 8)$$

Върхът B е пресечна точка на правата AB и медианата m_B .

$$\left| \begin{array}{l} AB : x - 4y + 34 = 0 \\ m_B : x + y + 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -10 \\ y = 6 \end{array} \right. \Rightarrow B(-10, 6)$$

Средата M на страната AC е пресечна точка на AC и m_b . Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x + y - 4 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{array} \right.$$

и получаваме $M(8, -12)$. Тъй като $M(8, -12)$ е среда на отсечката AC , то лесно намираме върха C :

$$\begin{aligned} \frac{x_A + x_C}{2} &= x_M, & \frac{y_A + y_C}{2} &= y_M \\ \frac{-2 + x_C}{2} &= 8, & \frac{8 + y_C}{2} &= -12 \end{aligned}$$

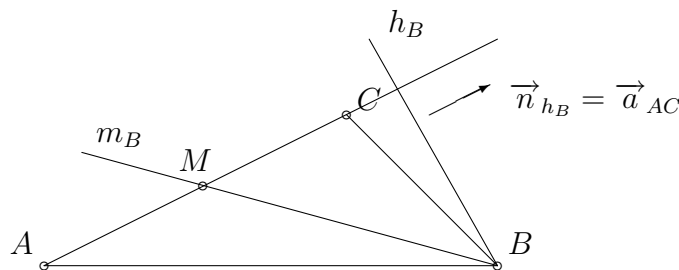
$$\begin{cases} x_C = 18 \\ y_C = -32 \end{cases} \Rightarrow C(18, -32)$$

По двете точки $B(-10, 6)$ и $C(18, -32)$ написваме уравнението на правата BC .

$$BC : \frac{x + 10}{28} = \frac{y - 6}{-38}, \quad BC : 19x + 14y + 106 = 0.$$

8.11 Дадени са координатите на върха $A(-2, 9)$ и уравненията на височината $h_B : 6x + 13y + 29 = 0$ и медианата $m_B : 3x + 10y - 10 = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на другите два върха на триъгълника.

Решение:



Точка B намираме като пресечна точка на дадените височина и медиана:

$$\begin{cases} h_B : 6x + 13y + 29 = 0 \\ m_B : 3x + 10y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -20 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow B(-20, 7)$$

Нормалният вектор на височината h_B служи за направляващ вектор на правата AC . Следователно

$$AC : \frac{x + 2}{6} = \frac{y - 9}{13}$$

$$AC : 13x - 6y + 80 = 0$$

Да означим средата на AC с M .

$$\begin{cases} AC : 13x - 6y + 80 = 0 \\ m_B : 3x + 10y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2,5 \end{cases} \Rightarrow M(-5; 2,5)$$

Знаейки средата $M(-5; 2,5)$ и единият край $A(-2, 9)$ на отсечката AC , лесно намираме точката C :

$$\frac{x_A + x_C}{2} = x_M, \quad \frac{y_A + y_C}{2} = y_M$$

$$\frac{-2 + x_C}{2} = -5, \quad \frac{9 + y_C}{2} = 2,5$$

$$\begin{cases} x_C = -8 \\ y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(-8, -4)$$

Задачи за самостоятелна работа:

8.12. Да се определи кои от точките $M_1(2, -1)$, $M_2(6, -7)$, $M_3(1, 1)$, $M_4(0, 2)$ лежат на правата $g : 3x + 2y - 4 = 0$.

Отг. M_1, M_2, M_4

8.13 Да се определи дали дадените точки лежат в една и съща полуравнина относно правата g .

а) $M_1(0, 1)$, $M_2(4, 2)$, $g : x - y - 3 = 0$

б) $M_1(2, 4)$, $M_2(-2, 7)$, $g : y = 2x + 5$

Отг. а) да б) не

8.14 Да се намери пресечната точка на правите g_1 и g_2 .

а) $g_1 : 3x + 7y - 15 = 0$, $g_2 : 6x + 14y + 12 = 0$,

б) $g_1 : 2x + 4y - 6 = 0$, $g_2 : 3x + 6y - 9 = 0$,

в) $g_1 : x + y + 8 = 0$, $g_2 : 2x + 3y + 25 = 0$,

Отг. а) успоредни б) сливат се в) $M(1, -9)$

8.15 Да се намерят координатите на върховете на $\triangle ABC$, ако са дадени уравненията на страните му.

а) $AB : 15x + 2y - 3 = 0$, $BC : 16x + y + 7 = 0$, $AC : x - y - 7 = 0$

б) $AB : 2x - y + 4 = 0$, $BC : x - y + 2 = 0$, $AC : x - 2y + 5 = 0$

Отг. а) $A(1, -6)$, $B(-1, 9)$, $C(0, -7)$

б) $A(-1, 2)$, $B(-2, 0)$, $C(1, 3)$

8.16 Да се намерят уравненията на страните на $\triangle ABC$, ако са дадени координатите на върховете му.

а) $A(-4, 1)$, $B(5, -2)$, $C(-10, 11)$

б) $A(8, -9)$, $B(1, -5)$, $C(13, -6)$

Отг. а) $AB : x + 3y + 1 = 0$, б) $AB : 4x + 7y + 31 = 0$,
 $BC : 13x + 15y - 35 = 0$, $BC : x + 12y + 59 = 0$,
 $AC : 5x + 3y + 17 = 0$, $AC : 3x - 5y - 69 = 0$.

8.17 Да се определи ъгълът между правите g_1 и g_2 .

а) $g_1 : y = -2x + 11$ $g_2 : y = 3x - 4$

б) $g_1 : 2x - y - 3 = 0$ $g_2 : x + 2y + 2 = 0$

Отг. а) 45° б) 90°

8.18 Намерете дължината на височината през върха C на $\triangle ABC$: $A(-1, -2)$, $B(2, 4)$, $C(1, 7)$.

Отг. $\sqrt{5}$

8.19 Намерете разстоянието между успоредните прави $g_1 : 3x + 4y - 15 = 0$ и $g_2 : 3x + 4y + 20 = 0$.

Отг. 7

8.20 Намерете ортоцентъра и медицентъра на $\triangle ABC$ с върхове $A(-2, -4)$, $B(0, -5)$ и $C(-3, -3)$.

$$\text{Отг. } H(-8, -13), G\left(-\frac{5}{3}, -4\right)$$

8.21 Да се намери ортогоналната проекция P на точката M върху правата g .

- а) $M(6, 8)$ $g : 2x + y - 10 = 0$
 б) $M(10, -3)$ $g : x - 2y - 1 = 0$
 в) $M(1, 3)$ $g : 2x + y = 0$

$$\text{Отг. а) } P(2, 6) \quad \text{б) } P(7, 3) \quad \text{в) } P(-1, 2)$$

8.22 Да се намери точка N , симетрична на точката M относно правата g .

- а) $M(-2, 9)$ $g : 2x - 3y + 18 = 0$
 б) $M(-5, 13)$ $g : 2x - 3y - 3 = 0$
 в) $M(4, 5)$ $g : 3x + 2y + 4 = 0$

$$\text{Отг. а) } N(2, 3) \quad \text{б) } N(11, -11) \quad \text{в) } N(-8, -3)$$

8.23 Върху правата $g : 4x + 3y - 12 = 0$ намерете точка C , равноотдалечена от точките $A(-1, -2)$ и $B(1, 4)$.

$$\text{Отг. } C(3, 0)$$

8.24 Да се намери уравнението на ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A , ако са дадени уравненията на страните на $\triangle ABC$.

- а) $AB : x - 2y + 4 = 0$, $BC : x - 4 = 0$, $AC : 2x - y - 1 = 0$
 б) $AB : 2x - 11y + 5 = 0$, $BC : x - 13y + 25 = 0$, $AC : x + 2y - 5 = 0$

$$\text{Отг. а) } l : x - y + 1 = 0 \quad \text{б) } l : 7x - y - 20 = 0$$

8.25 Дадени са координатите на връх и уравненията на две височини в $\triangle ABC$. Намерете координатите на другите два върха на триъгълника.

- а) $B(1, 1)$, $h_A : x - 4 = 0$, $h_C : 3x + y - 1 = 0$
 б) $C(3, 7)$, $h_A : x - 4y + 7 = 0$, $h_B : 2x + 5y - 23 = 0$
 в) $B(2, 10)$, $h_A : 3x - 2y + 22 = 0$, $h_C : 2x - y + 14 = 0$
 г) $C(0, 4)$, $h_A : x + y - 7 = 0$, $h_B : 2x + y - 7 = 0$

$$\text{Отг. а) } A(4, 2), C(0, 1) \quad \text{в) } A(0, 11), C(-1, 12) \\ \text{б) } A(1, 2), B(4, 3) \quad \text{г) } A(2, 5), B(1, 5)$$

8.26 Дадени са уравненията на страна и на две височини в $\triangle ABC$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.

- а) $AB : 3x - 2y - 21 = 0$, $h_A : x + 2y + 17 = 0$, $h_B : x + y + 13 = 0$
 б) $BC : x + 2y - 12 = 0$, $h_B : 3x - 2y + 12 = 0$, $h_C : x - y + 3 = 0$

$$\text{Отг. а) } A(1, -9), B(-1, -12), C(0, -10) \\ \text{б) } A(-1, 7), B(0, 6), C(2, 5)$$

8.27 Дадени са два върха на $\triangle ABC$ и ортоцентърът му H . Намерете третия връх.

- а) $A(0, -6)$, $B(1, -4)$, $H(-6, -4)$
 б) $B(1, -3)$, $C(0, -6)$, $H(6, -3)$

$$\text{Отг. а) } C(0, -7) \quad \text{б) } A(0, -1)$$

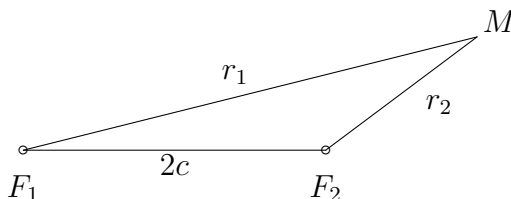
Глава 9

Елипса, хипербола, парабола

В тази глава са представени каноничните уравнения на кривите линии от втора степен - елипса, хипербола и парабола.

ЕЛИПСА

Нека в равнината са дадени две точки F_1 и F_2 , които ще наричаме фокуси, и нека разстоянието между тях е $2c$.

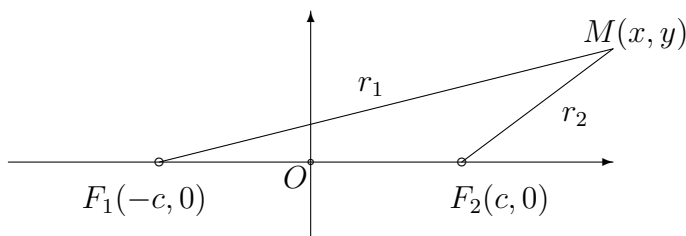


Дефиниция 9.1 Множеството от точки в равнината, сумата от разстоянията на които до двете дадени точки е постоянна величина, по-голяма от разстоянието между тях, се нарича **елипса**.

Ако означим $|MF_1| = r_1$, $|MF_2| = r_2$ и сумата от двете разстояния с $2a$, то условието от дефиницията можем да запишем по следния начин

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (c < a) \quad (9.1)$$

За да изведем уравнението, което ще удовлетворяват точките от елипсата, ще въведем подходяща правоъгълна координатна система. Абсцисна ос ще минава през двата фокуса, а ординатната ос ще минава през средата на отсечката F_1F_2 .



Тогава

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

и условието (9.1) добива вида

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (a > c) \quad (9.2)$$

За да се освободим от радикалите ще преобразуваме (9.2) като повдигнем двете му страни на квадрат два пъти.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4cx \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a - \frac{c}{a}x \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned} (x-c)^2 + y^2 &= a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \\ (1 - \frac{c^2}{a^2})x^2 + y^2 &= a^2 - c^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned} \quad (9.4)$$

Полагаме

$$a^2 - c^2 = b^2$$

и получаваме

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Разделяме двете страни на a^2b^2 и получаваме

$$(k_1) : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9.5)$$

И така, ако една точка принадлежи на елипсата, координатите и удовлетворяват уравнението (9.5). За да докажем, че това е уравнението на елипса е необходимо да покажем, че за всяка точка $M(x, y)$, която удовлетворява уравнението (9.5), сумата от разстоянията до двата фокуса $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ е $2a$, т.е. тя принадлежи на елипсата.

Тъй като (9.5) е еквивалентно на (9.4), то за r_1 получаваме

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + a^2 - c^2 - (1 - \frac{c^2}{a^2})x^2} = \\ &= \sqrt{(x+c)^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{2cx + a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} \end{aligned}$$

Следователно

$$r_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right|$$

Аналогично

$$r_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right|$$

От (9.5) получаваме

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}(a^2 - x^2) \quad (9.6)$$

И тъй като лявата страна на (9.6) е неотрицателна, получаваме че $|x| \leq a$. Понеже $c < a$, то $\left|\frac{c}{a}x\right| < a$. Тогава

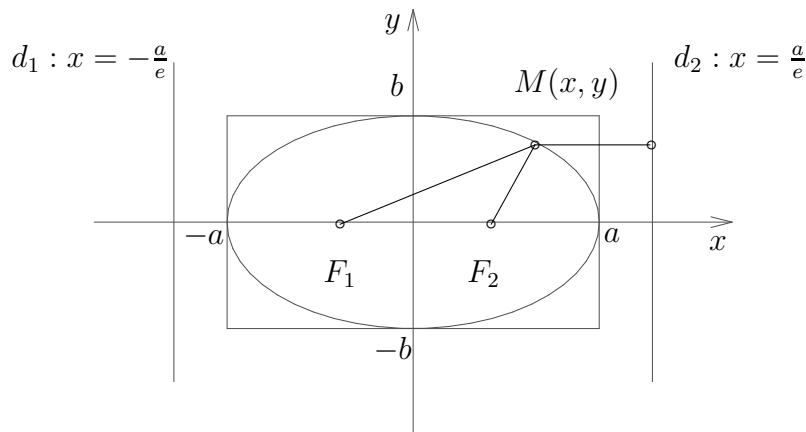
$$a - \frac{c}{a}x \geq 0, \quad a + \frac{c}{a}x \geq 0 \quad \text{и} \quad r_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x$$

Следователно

$$r_1 + r_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a$$

■

От (9.5) следва, че графиката на елипсата лежи във вътрешността на правоъгълник със страни $2a$ и $2b$ и че е симетрична спрямо двете координатни оси. Пресечните точки с координатните оси имат съответно координати $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, -b)$ и $(0, b)$. Числото a се нарича *голяма полуос* на елипсата, а b - *малка полуос*.



Да означим

$$\frac{c}{a} = e \quad (9.7)$$

Числото e се нарича **ексцентрицитет** на елипсата. Тъй като $c < a$, то ексцентрицитетът на елипсата е по-малък от единица.

В следващите редове ще докажем друго характеристично свойство на елипсата. Да разгледаме правите с уравнения $d_1 : x = -\frac{a}{e}$ и $d_2 : x = \frac{a}{e}$. Тези прави се наричат **директриси** на елипсата. Да означим разстоянията от произволна точка $M(x, y) \in (k_1)$ до двете директриси с ρ_1 и ρ_2 . В сила е следната теорема:

Теорема 9.1

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{r_2}{\rho_2} = e$$

Доказателство: Имаме $r_1 = a + ex$, $r_2 = a - ex$,

$$\rho_1 = \frac{a}{e} + x = \frac{a + ex}{e}, \quad \rho_2 = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e}.$$

Следователно

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{a + ex}{\frac{a + ex}{e}} = e \quad \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{a - ex}{\frac{a - ex}{e}} = e$$

Ако в уравнението на елипсата $a = b = R$, то $c = 0$ и двата фокуса ще съвпадна. Следователно ще получим множество от точки в равнината, които са равноотдалечени от дадената точка, която в този случай наричаме център, а кривата е добре познатата ни окръжност. Следователно каноничното уравнение на окръжност с център $C(0, 0)$ и радиус R е

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Ако центърът е точката $C(x_0, y_0)$, тогава уравнението на окръжността е

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Пример 9.1: Да се напише уравнението на окръжност с център $C(2, -3)$ и радиус $R = 5$.

Решение: Уравнението на окръжността е

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

или

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

Пример 9.2: Да се покаже, че уравнението $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 16 = 0$ е уравнение на окръжност. Да се намерят центъра и радиуса на окръжността.

Решение: Преобразуваме даденото уравнение с цел да отделим точни квадрати

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 16 - 16 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 4 - 4 - 16 = 0$$

или

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 36$$

Следователно окръжността има център $C(4, -2)$ и радиус $R = 6$.

Нека g е права линия с уравнение $y = kx + n$. Сега ще изведем условие правата g да бъде допирателна до елипсата (9.5). Щом правата g е допирателна до елипсата, то уравнението

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + n)^2}{b^2} = 1$$

има единствено решение. Следователно дискриминантата D на

$$b^2x^2 + a^2(kx + n)^2 - a^2b^2 = 0$$

е равна на нула. Последното уравнение е еквивалентно на

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2knx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

Следователно

$$D = 4a^4k^2n^2 - 4(a^2k^2 + b^2)a^2(n^2 - b^2) = 0$$

Преобразуваме последователно

$$a^4k^2n^2 - a^2(a^2k^2 + b^2)(n^2 - b^2) = 0$$

$$a^2k^2n^2 - (a^2k^2 + b^2)(n^2 - b^2) = 0$$

$$a^2k^2n^2 - a^2k^2n^2 + a^2k^2b^2 - b^2n^2 + b^4 = 0$$

$$b^2(a^2k^2 - n^2 + b^2) = 0$$

и получаваме

$$a^2k^2 + b^2 = n^2 \quad (9.8)$$

Нека $M(x_1, y_1)$ е точка от елипсата (9.5). Ако правата g е допирателна към елипсата в точката M , тя ще има уравнение

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Използвайки (от математическия анализ), че $k = y'(x_1) = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ получаваме

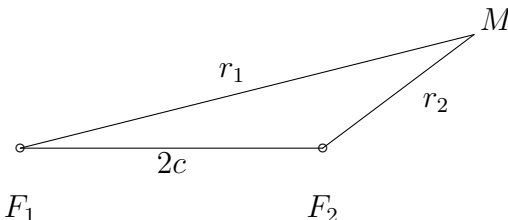
$$\begin{aligned} y - y_1 &= -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \\ a^2yy_1 + b^2xx_1 &= b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2, \end{aligned}$$

което добива вида

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad (9.9)$$

ХИПЕРБОЛА

Нека отново са дадени две точки F_1 и F_2 , които ще наричаме фокуси, и нека разстоянието между тях е $2c$.

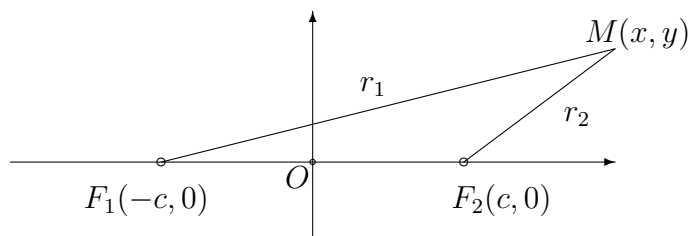


Дефиниция 9.2 Множеството от точки в равнината, модулът на разликата от разстоянията на които до двете дадени точки е постоянна величина, по-малка от разстоянието между тях, се нарича **хипербола**.

Ако означим $|MF_1| = r_1$, $|MF_2| = r_2$ и разликата от двете разстояния с $2a$, то условието от дефиницията можем да запишем по следния начин

$$|r_1 - r_2| = 2a \quad (a < c) \quad (9.10)$$

За да изведем уравнението на хиперболата, ще въведем правоъгълна координатна система, както при извеждане уравнението на елипсата.



Тогава

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

и условието (9.10) добива вида

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (a < c) \quad (9.11)$$

За да се освободим от радикалите ще преобразуваме (9.11) като повдигнем двете му страни на квадрат два пъти.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \\ (x+c)^2 + y^2 &= (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \\ 4cx - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2((x-c)^2 + y^2) \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \end{aligned} \quad (9.12)$$

Полагаме

$$c^2 - a^2 = b^2$$

и получаваме

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Разделяме двете страни на a^2b^2 и получаваме

$$(k_2) : \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9.13)$$

За да докажем, че полученото уравнение е уравнението на хипербола е необходимо да докажем, че за всяка точка $M(x, y)$, която удовлетворява уравнението (9.13), разликата от разстоянията до двата фокуса $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ е $\pm 2a$. Тъй като (9.13) е еквивалентно на (9.12), то за r_1 получаваме

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + a^2 - c^2 + \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)x^2} = \\ &= \sqrt{(x+c)^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{2cx + a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} \end{aligned}$$

Да означим

$$\frac{c}{a} = e > 1 \quad - \text{ексцентрицитет} \quad (9.14)$$

Следователно

$$r_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = |a + ex|$$

Аналогично

$$r_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = |a - ex|$$

От (9.13) получаваме

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{1}{a^2}(x^2 - a^2) \quad (9.15)$$

И тъй като лявата страна на (9.15) е неотрицателна, получаваме че

$$x^2 - a^2 \geq 0 \iff (x - a)(x + a) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -a] \text{ или } x \in [a, \infty)$$

Следователно трябва да разгледаме два случая:

1. $x \leq -a$ Тъй като $e > 1$, следва че $a + ex < 0$ и $a - ex > 0$. Тогава

$$r_1 = -a - ex \quad r_2 = a - ex \quad (9.16)$$

Следователно $r_1 - r_2 = -a - ex - a + ex = -2a$.

2. $x \geq a$ В този случай $a + ex > 0$, а $a - ex < 0$. Тогава

$$r_1 = a + ex \quad r_2 = -a + ex \quad (9.17)$$

Следователно $r_1 - r_2 = a + ex + a - ex = 2a$ и с това доказахме, че наистина (9.13) е уравнението на хиперболата. ■

От (9.15) получаваме

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Да разгледаме и правите с уравнения

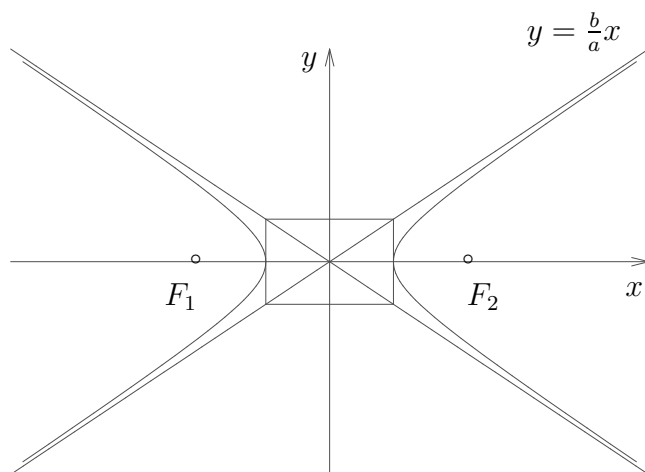
$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

В следващите редове ще докажем, че когато $x \rightarrow \infty$, графиката на хиперболата се доближава до графиката на съответната права линия. Наистина:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$\frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = ab \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0$$

Правите с уравнения $y = \pm \frac{b}{a} x$ се наричат **асимптоти** на хиперболата.



Аналогично на елипсата, условието права линия с уравнение $y = kx + n$ да бъде допирателна на хиперболатата (9.13) е

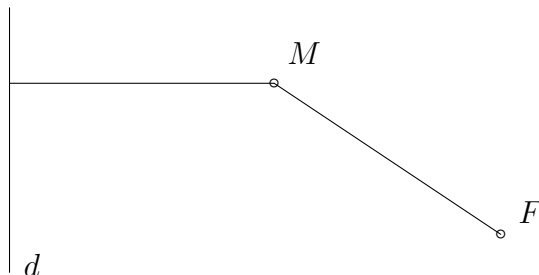
$$a^2 k^2 - b^2 = n^2 \quad (9.18)$$

Ако правата е допирателна в точката $M(x_1, y_1)$ от хиперболатата, то нейното уравнение е

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad (9.19)$$

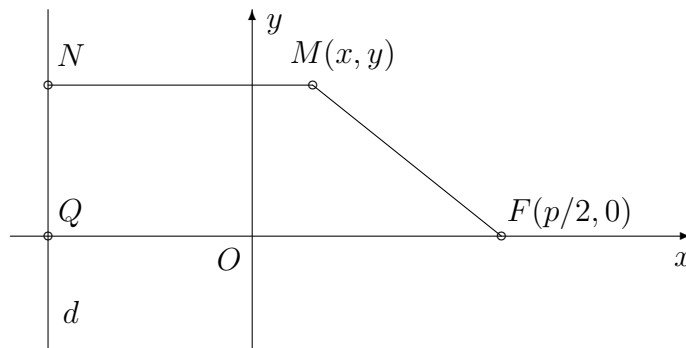
ПАРАБОЛА

Нека са дадени точка F , наречена фокус, и права d , наречена директриса.



Дефиниция 9.3 Множеството от точки в равнината, които са равноотдалечени от фокуса и от директрисата, се нарича **парабола**.

За да изведем уравнението на параболата, ще въведем подходяща правоъгълна координатна система. Абсцисната ос минава през фокуса и е перпендикулярна на директрисата, а ординатната ос разполовява разстоянието между фокуса и директрисата.



Да означим разстоянието от фокуса F до директрисата d с p . Тогава

$$|OQ| = |OF| = \frac{p}{2}$$

Точката F има координати $F(p/2, 0)$, а

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad |MN| = x + \frac{p}{2}$$

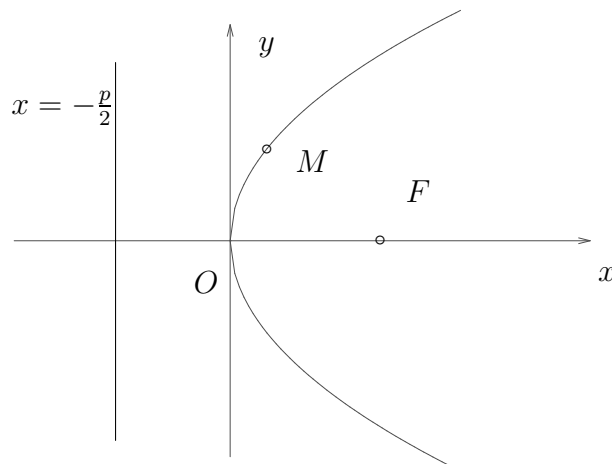
Следователно за точките $M(x, y)$ от параболата е изпълнено

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

Повдигаме двете страни на последното равенство на квадрат и получаваме

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} \\ x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} \\ y^2 &= 2px \end{aligned} \tag{9.20}$$

Уравнението (9.20) се нарича *канонично уравнение на параболата*.



Уравнението на допирателната в точката $M(x_1, y_1)$ от параболата е

$$yy_1 = p(x + x_1) \quad (9.21)$$

Елипсата, хиперболата и параболата притежават следните забележителни свойства:

1. Допирателната в дадена точка M на елипсата образува равни ъгли с фокалните радиуси F_1M и F_2M и лежи вън от ъгъла F_1MF_2 .
2. Допирателната в дадена точка M на хиперболата образува равни ъгли с фокалните радиуси F_1M и F_2M , като разполовява ъгъла F_1MF_2 .
3. Допирателната в дадена точка M на параболата образува равни ъгли с фокалния радиус FM и лъча през M , който е успореден на оста на параболата и е в нейната вътрешност.

ЗАДАЧИ

9.1 Напишете уравнението на окръжност с диаметър AB : $A(-4, 1)$, $B(2, 3)$.

Решение: Центърът на окръжността $C(-1, 2)$ е средата на отсечката AB , а радиусът е $R = |CB| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$. Следователно уравнението на окръжността е $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$ или $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$

9.2 Напишете уравненията на допирателните към окръжността (k) : $x^2 + y^2 = 5$, които са успоредни на правата g : $2x - y + 1 = 0$.

Решение: Тъй като допирателните са успоредни на правата g , те имат уравнения от вида $y = 2x + n$. Тогава системата

$$\begin{cases} 2x - y + n = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

трябва да има единствено решение. Това означава, че квадратното уравнение $x^2 + (2x+n)^2 = 5$ трябва да има единствено решение. След преобразуване уравнението добива вида $5x^2 + 4nx + n^2 - 5 = 0$. Пресмятаме неговата дискриминанта и я приравняваме на нула.

$$D = 16n^2 - 20(n^2 - 5) = 0, \quad \text{т.е.} \quad n = \pm 5$$

Следователно уравненията на допирателните са $y = 2x + 5$, $y = 2x - 5$.

9.3 Напишете уравнението на окръжност, която е описана около триъгълника с върхове $A(7, 7)$, $B(0, 8)$, $C(-2, 4)$.

Решение: Центърът на окръжността G е пресечна точка на симетралите на две от страните (например AC и BC), а радиусът е разстоянието от центъра до връх на триъгълника.

Намираме симетралите $s_1 : 3x + y - 13 = 0$ и $s_2 : x + 2y - 11 = 0$ на страните AC и BC . (Направете това сами, виж зад. 8.3 от глава 8.) Решаваме системата

$$\begin{cases} x + 2y - 11 = 0 \\ 3x + y - 13 = 0 \end{cases}$$

и получаваме центъра $G(3, 4)$. Радиусът на окръжността е $R = |GB| = \sqrt{9 + 16} = 5$. Следователно търсеното уравнение е $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

9.4 Напишете декартовото уравнение на окръжността $\rho = \sin \theta + \cos \theta$.

Решение: Използваме, че

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

Следователно

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Преобразуваме и получаваме

$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \quad \text{или} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

9.5 Напишете каноничното уравнение на елипсата, ако $a = 12$, $e = 0.5$

Решение: От $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ и $a = 12$ получаваме, че $c = 6$. Тогава $b^2 = a^2 - c^2 = 144 - 36 = 108$. Следователно уравнението на елипсата е

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{108} = 1$$

9.6 Напишете каноничното уравнение на хипербола, ако $2a = 20$, $2c = 30$

Решение: Имаме $a = 10$, $c = 15$. Тогава $b^2 = c^2 - a^2 = 225 - 100 = 125$. Следователно уравнението на хиперболата е

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{125} = 1$$

9.7 Установете, че уравнението $x + 3y^2 + 8y + 2 = 0$ е уравнение на парабола и определете координатите на нейния връх.

Решение: Преобразуваме уравнението $x + 3y^2 + 8y + 2 = 0$ по следния начин

$$x - 2 = -3 \left(y^2 + \frac{8}{3}y + \frac{16}{9} - \frac{16}{9} \right)$$

$$x - 2 = -3 \left(y^2 + \frac{8}{3}y + \frac{16}{9} \right) + \frac{16}{3}$$

$$x - \frac{10}{3} = -3 \left(y + \frac{4}{3} \right)^2$$

Полагаме

$$x - \frac{10}{3} = X, \quad y + \frac{4}{3} = Y$$

и получаваме

$$X = -3Y^2$$

При $X = 0$ и $Y = 0$ получаваме, че върхът на параболата е $A(10/3, -4/3)$.

Задачи за самостоятелна работа:

9.8 Напишете уравнението на окръжност с център C и радиус R .

- а) $C(2, 1)$, $R = 5$
- б) $C(2, -3)$, $R = 2$
- в) $C(-4, 1)$, $R = 3$
- г) $C(-1, -5)$, $R = 1$

- Отг. а) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$
 б) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
 в) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$
 г) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 25 = 0$

9.9 Покажете, че следните уравнения са уравнения на окръжност. Намерете центъра на окръжността C и радиуса R .

- а) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$
- б) $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$
- в) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$
- г) $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$

- Отг. а) $C(1, -1)$, $R = 2$
 б) $C(0, -2)$, $R = \sqrt{5}$
 в) $C(-2, 3)$, $R = 4$
 г) $C(1/2, -1)$, $R = 3/2$

9.10 Напишете уравнението на окръжност с диаметър AB .

- а) $A(3, 2)$, $B(5, 6)$
- б) $A(-1, -3)$, $B(-3, 1)$

- Отг. а) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 27 = 0$
 б) $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$

9.11 Намерете дължината на хордата, която правата с уравнение $y = x - 4$ отсича от окръжността $(k) : x^2 + y^2 + 2x - 4y = 20$.

Отг. $d = \sqrt{2}$

9.12 Напишете уравнението на общата хорда на окръжностите $(k_1) : x^2 + y^2 = 10$ и $(k_2) : x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0$.

Отг. $x + y - 4 = 0$

9.13 Напишете уравнението на окръжност, която е вписана в триъгълника, ограничен от координатните оси и правата с уравнение $3x + 4y - 12 = 0$.

Отг. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

9.14 Напишете декартовите уравнения и начертайте следните окръжности:

а) $\rho = 4 \sin \theta$

б) $\rho = \cos \theta$

Отг. а) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

б) $x^2 + y^2 - x = 0$

9.15 Напишете каноничното уравнение на елипсата, ако:

а) $2c = 10, \quad a = 8$

б) $2c = 10, \quad b = 4$

Отг. а) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$

б) $\frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{16} = 1$

9.16 Намерете уравненията на допирателните към елипсата с уравнение $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$, които са успоредни на правата $g : 2x - y + 17 = 0$.

Отг. $y = 2x + 12, \quad y = 2x - 12$

9.17 Напишете каноничното уравнение на елипса, която се допира до правите $x + y - 5 = 0$ и $x - 4y - 10 = 0$.

Отг. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

9.18 Напишете уравненията на общите допирателни на елипсите $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$

Отг. $x + y = \pm 3, \quad x - y = \pm 3$

9.19 Напишете каноничното уравнение на хипербола, ако:

а) $a = 5, \quad e = 1.4$

б) $2c = 10, \quad y = 0.5x - \text{асимптота}$

Отг. а) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$

б) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$

9.20 Дадена е хиперболата $x^2 - y^2 = 8$. Напишете каноничното уравнение на хипербола със същите фокуси, минаваща през точката $M(-5, 3)$.

Отг. $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$

9.21 Напишете каноничното уравнение на хипербола с асимптота $y = 0.5x$, която се допира до правата $5x - 6y = 8$.

$$\text{Отг. } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

9.22 Напишете каноничното уравнение на хипербола, която се допира до правата $x - y = 2$ в точка $M(4, 2)$.

$$\text{Отг. } \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$$

9.23 Напишете каноничното уравнение на хипербола, която има за фокуси върховете на елипсата $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ и минава през нейните фокуси.

$$\text{Отг. } \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$$

9.24 Установете, че следните уравнения са уравнения на параболи и определете координатите на върховете им.

а) $y = 4x^2 - 8x + 4$

б) $y = 2x^2 + 4x + 5$

в) $y = -x^2 + 2x$

$$\text{Отг. а) } A(1, 0) \quad \text{б) } A(-1, 3) \quad \text{в) } A(1, 1)$$

9.25 Намерете уравненията на допирателните към параболата $y^2 = 36x$, които минават през точката $M(2, 9)$.

$$\text{Отг. } y = 3x + 3, \quad 2y = 3x + 12$$

9.26 Намерете най-късото разстояние от параболата $y^2 = 64x$ до правата с уравнение $4x + 3y + 46 = 0$.

$$\text{Отг. } d = 2, \text{ най-близка точка } A(9, -24)$$

Глава 10

Трансформация на координатната система

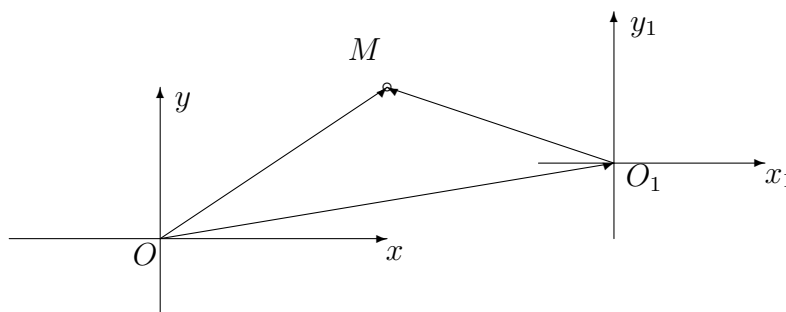
В тази глава са представени зависимостите между координатите на произволна точка при смяна на координатната система. Показано е как се канонизира уравнение на крива линия от втора степен.

СМЯНА НА КООРДИНАТНАТА СИСТЕМА

Нека в равнината е зададена декартова координатна система Oxy и точка M има координати $M(x, y)$ спрямо тази система. Нека в точката $O_1(x_0, y_0)$ въведем нова координатна система $O_1x_1y_1$ и спрямо новата координатна система координатите на точка M са $M(x_1, y_1)$. Основната задача, която си поставяме е да намерим каква е връзката между x, x_0, x_1, y, y_0 и y_1 .

Първо ще разгледаме случая, когато втората координатна система е получена от първата чрез **успoredно пренасяне (транслация)**.

1. Транслация



Нека единичните вектори по осите O_1x_1 и O_1y_1 са съответно $\vec{i}_1$ и $\vec{j}_1$. Тогава имаме:

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}, \quad \overrightarrow{OO_1} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j}, \quad \overrightarrow{O_1M} = x_1 \cdot \vec{i}_1 + y_1 \cdot \vec{j}_1$$

Но координатната система $O_1x_1y_1$ е получена от Oxy чрез успoredно пренасяне, т.е. $\vec{i} = \vec{i}_1$ и $\vec{j} = \vec{j}_1$ и следователно

$$\overrightarrow{O_1M} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$$

Имаме

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

и следователно

$$\begin{aligned} x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} &= x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} \\ \Rightarrow (x - x_0 - x_1) \cdot \vec{i} + (y - y_0 - y_1) \cdot \vec{j} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Тъй като векторите $\vec{i}$ и $\vec{j}$ са линейно независими, то последното равенство е възможно само когато

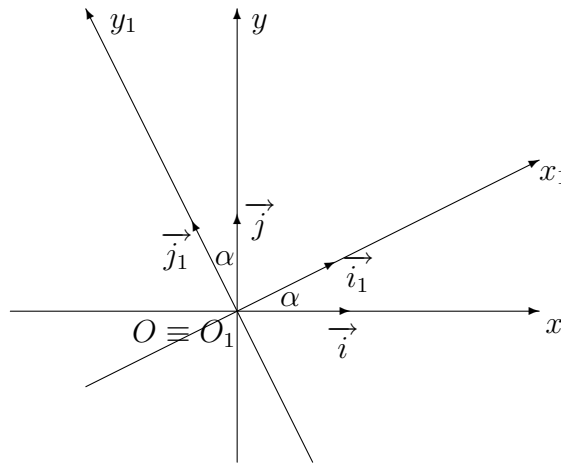
$$\begin{cases} x - x_0 - x_1 = 0 \\ y - y_0 - y_1 = 0 \end{cases},$$

т.е.

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 \\ y = y_0 + y_1 \end{cases} \quad (10.1)$$

2. Въртене (ротация)

При ротация координатната система $O_1x_1y_1$ се получава от Oxy чрез завъртане на $\angle\alpha$.



От чертежа се вижда, че ъглите между единичните вектори на двете координатни системи са:

$$\begin{aligned} \angle(\vec{i}_1, \vec{i}) &= \alpha, & \angle(\vec{i}_1, \vec{j}) &= \frac{\pi}{2} - \alpha \\ \angle(\vec{j}_1, \vec{j}) &= \alpha, & \angle(\vec{j}_1, \vec{i}) &= \frac{\pi}{2} + \alpha \end{aligned}$$

Следователно, ако $\vec{i}_1(x_1, y_1)$ и $\vec{j}_1(x_2, y_2)$, то (виж глава 6, стр. 98)

$$x_1 = \vec{i}_1 \cdot \vec{i} = \cos \alpha \qquad y_1 = \vec{i}_1 \cdot \vec{j} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$x_2 = \vec{j}_1 \cdot \vec{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \qquad y_2 = \vec{j}_1 \cdot \vec{j} = \cos \alpha$$

Тогава

$$\begin{aligned}\vec{i}_1 &= \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j} \\ \vec{j}_1 &= -\sin \alpha \cdot \vec{i} + \cos \alpha \cdot \vec{j}\end{aligned}\quad (10.2)$$

Равенствата (10.2) можем да запишем в матричен вид

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

Детерминантата на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

е равна на 1 и следователно тя има обратна. Тогава

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \cos \alpha \cdot \vec{i}_1 - \sin \alpha \cdot \vec{j}_1 \\ \vec{j} &= \sin \alpha \cdot \vec{i}_1 + \cos \alpha \cdot \vec{j}_1\end{aligned}\quad (10.3)$$

Координатите на произволна точка M са $M(x, y)$ спрямо Oxy и $M(x_1, y_1)$ спрямо Ox_1y_1 . Тогава

$$\begin{aligned}(x, y) \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} &= (x_1, y_1) \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \end{pmatrix} = (x_1, y_1) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \\ &= (\cos \alpha \cdot x_1 - \sin \alpha \cdot y_1, \sin \alpha \cdot x_1 + \cos \alpha \cdot y_1) \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

и следователно

$$\begin{cases} x &= \cos \alpha \cdot x_1 - \sin \alpha \cdot y_1 \\ y &= \sin \alpha \cdot x_1 + \cos \alpha \cdot y_1 \end{cases}\quad (10.4)$$

3. Общ случай на смяна на координатната система

Общият случай на смяна на координатната система е последователно прилагане на трансляция и ротация или обратното. Следователно формулите в този случай са:

$$\begin{cases} x &= x_0 + \cos \alpha \cdot x_1 - \sin \alpha \cdot y_1 \\ y &= y_0 + \sin \alpha \cdot x_1 + \cos \alpha \cdot y_1 \end{cases}\quad (10.5)$$

КАНОНИЗИРАНЕ УРАВНЕНИЯТА НА КРИВИ ЛИНИИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

Общото уравнение на крива линия от втора степен има вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

където коефициентите a_{ij} са реални числа.

Чрез подходяща смяна на координатната система уравнението на крива линия от втора степен може да се сведе до едно от 9 нееквивалентни уравнения, като 6 задават реални криви (в частност - двойки прави) и 3 имагинерни. Шестте реални са елипса, хипербола, парабола, две пресичащи се прави, две успоредни прави или две сливащи се прави. Този процес наричаме **канонизация**. Канонизацията извършваме чрез последователно прилагане на ротация и трансляция.

1. Ако $a_{12} \neq 0$, извършваме подходяща ротация

$$\begin{cases} x = \cos \alpha \cdot x_1 - \sin \alpha \cdot y_1 \\ y = \sin \alpha \cdot x_1 + \cos \alpha \cdot y_1 \end{cases}$$

с цел в новото уравнение да липсва смесеното произведение x_1y_1 .

Ъгълът α се определя от условието

$$\cotg 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \quad (10.6)$$

След това извършваме трансляция.

2. Ако $a_{12} = 0$, извършваме само трансляция.

Ще демонстриране канонизацията с няколко примера.

ЗАДАЧИ

10.1 Да се канонизира уравнението на кривата

$$17x^2 - 6xy + 9y^2 + 12x - 36y - 252 = 0 \quad (10.7)$$

Решение: Тъй като $a_{12} \neq 0$, трябва да извършим подходяща ротация на координатната система Oxy . Ъгълът α определяме от условието

$$\cotg 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Но

$$\cotg 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

Следователно

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Преобразуваме и получаваме

$$tg^2\alpha + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} \cdot tg\alpha - 1 = 0 \quad (10.8)$$

В (10.8) заместяваме $a_{11} = 17, a_{22} = 9, a_{12} = -3$ и получаваме квадратното уравнение

$$3tg^2\alpha - 8tg\alpha - 3 = 0$$

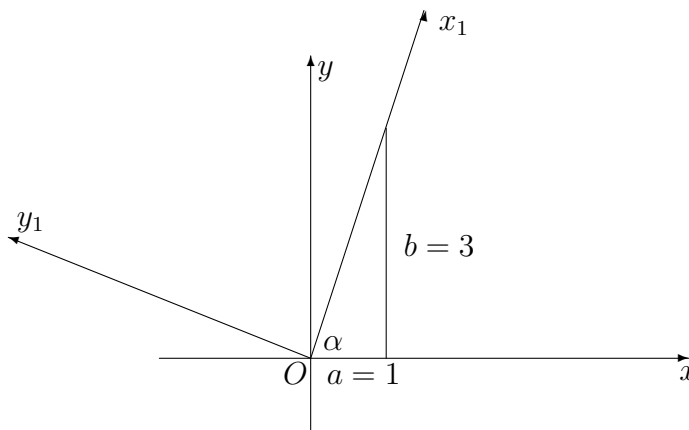
Неговите решения са $tg\alpha = 3$ и $tg\alpha = -1/3$. Избираме $tg\alpha = 3$ (за да извършим ротацията в положителна посока).

За да определим $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ можем да постъпим по един от следните два начина:

Първи начин: Използваме познатите формули от тригонометрията

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$$

Втори начин:



$$tg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{1}, \quad b = 3, a = 1$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Следователно формулите за ротацията са

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{10}}(x_1 - 3y_1) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{10}}(3x_1 + y_1) \end{aligned}$$

Заместяваме в (10.7) и след преобразуване получаваме

$$8x_1^2 + 18y_1^2 - \frac{96}{\sqrt{10}}x_1 - \frac{72}{\sqrt{10}}y_1 - 252 = 0$$

Сега трябва да направим трансляция, т.е. да отделим точни квадрати.

$$8(x_1^2 - \frac{12}{\sqrt{10}}x_1) + 18(y_1^2 - \frac{4}{\sqrt{10}}y_1) - 252 = 0$$

$$8(x_1^2 - 2\frac{6}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{36}{10} - \frac{36}{10}) + 18(y_1^2 - 2\frac{2}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{4}{10} - \frac{4}{10}) - 252 = 0$$

$$8(x_1 - \frac{6}{\sqrt{10}})^2 + 18(y_1 - \frac{2}{\sqrt{10}})^2 = 288$$

Извършваме трансляция на координатната система $O_1x_1y_1$

$$x_1 = X + \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$y_1 = Y + \frac{2}{\sqrt{10}}$$

и получаваме каноничното уравнение на кривата спрямо последната координатна система O_2XY , $(O_2(\frac{6}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}))$

$$\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

Следователно уравнението (10.7) е уравнение на елипса.

10.2 Да се канонизира уравнението на кривата

$$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0 \quad (10.9)$$

Решение: Коефициентът $a_{12} \neq 0$ и трябва да извършим ротация на координатната система Oxy .

Ъгълът α определяме от условието (10.8). Заместваме $a_{11} = 3$, $a_{22} = 0$, $a_{12} = -2$ и получаваме квадратното уравнение

$$2tg^2\alpha - 3tg\alpha - 2 = 0$$

Неговите решения са $tg\alpha = 2$ и $tg\alpha = -1/2$. Избираме $tg\alpha = 2$.

Определяме $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ по втория начин.

$$tg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{2}{1}, \quad b = 2, a = 1$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Следователно формулите за ротацията са

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1) \end{aligned}$$

Заместваме в (10.9) и след преобразуване получаваме

$$4y_1^2 - x_1^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 - 5 = 0$$

Сега отделяме точни квадрати:

$$\begin{aligned}
4(y_1^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1) - (x_1^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x_1) - 5 &= 0 \\
4(y_1^2 + 2\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}) - (x_1^2 - 2\frac{3}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{9}{5} - \frac{9}{5}) - 5 &= 0 \\
4(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - (x_1 - \frac{3}{\sqrt{5}})^2 &= 4
\end{aligned}$$

Извършваме трансация на координатната система $O_1x_1y_1$

$$x_1 = X + \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$y_1 = Y - \frac{1}{\sqrt{5}}$$

и получаваме каноничното уравнение на кривата спрямо последната координатна система O_2XY , $(O_2(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ - спрямо Ox_1y_1)

$$\frac{Y^2}{1} - \frac{X^2}{4} = 1$$

Следователно уравнението (10.9) е уравнение на хипербола.

10.3 Да се канонизира уравнението на кривата

$$4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 9 = 0 \quad (10.10)$$

Решение: Коефициентът $a_{12} = 0$ и трябва да извършим само трансация на координатната система Oxy .

$$\begin{aligned}
4(x^2 - 2x) - (y^2 + 6y) - 9 &= 0 \\
4(x^2 - 2x + 1 - 1) - (y^2 + 6y + 9 - 9) - 9 &= 0 \\
4(x - 1)^2 - 4 - (y + 3)^2 + 9 - 9 &= 0 \\
4(x - 1)^2 - (y + 3)^2 &= 4
\end{aligned}$$

Извършваме трансация на координатната система Oxy

$$x = X + 1$$

$$y = Y - 3$$

и получаваме каноничното уравнение на кривата спрямо последната координатна система O_2XY , $(O_2(1, -3)$ - спрямо Oxy)

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

Следователно уравнението (10.10) е уравнение на хипербола.

Задачи за самостоятелна работа:

Да се канонизират уравненията и начертаят линиите:

10.4 $x^2 + 2y^2 - 5x + 4y - 6 = 0$

Отг. $\frac{2X^2}{57} + \frac{8Y^2}{57} = 1$

10.5 $x^2 - 3y^2 + 4x - 5y + 1 = 0$

Отг. $\frac{12X^2}{11} - \frac{36Y^2}{11} = 1$

10.6 $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$

Отг. $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1$

10.7 $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$

Отг. $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1$

10.8 $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

Отг. $Y^2 = 2\sqrt{2}X$

10.9 $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$

Отг. $Y^2 = 2\sqrt{5}X$

10.10 $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$

Отг. $Y^2 = -3\sqrt{2}X$

10.11 $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$

Отг. $\begin{cases} 2X - Y = 0 \\ 2X + Y = 0 \end{cases}$

10.12 $25x^2 + 40xy + 16y^2 + 70x + 56y + 49 = 0$

Отг. $5X + 4Y + 7 = 0$

10.13 $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$

Отг. $\begin{cases} X + Y + 1 - \sqrt{5} = 0 \\ X + Y + 1 + \sqrt{5} = 0 \end{cases}$

10.14 $3x^2 + 8xy + 3y^2 - 14x - 2y + 8 = 0$

Отг. $\begin{cases} 3X - Y - 2 = 0 \\ X + 3Y - 4 = 0 \end{cases}$

Глава 11

Повърхнини от втора степен

Общото уравнение на повърхнина от втора степен има вида

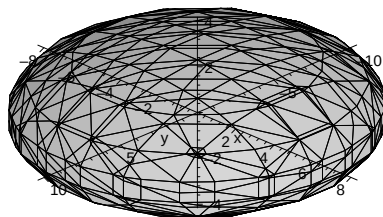
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

където коефициентите a_{ij} са реални числа.

Аналогично на кривите линии от втора степен общото уравнение на повърхнина от втора степен може чрез подходяща смяна на координатната система да се канонизира. Основните повърхнини от втора степен имат следните канонични уравнения:

ЕЛИПСОИД

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Координатите на точките от повърхнината удовлетворяват условията

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad -c \leq z \leq c$$

Елипсоидът е симетричен спрямо координатните равнини и координатното начало, защото и трите променливи са повдигнати на втора степен. Сеченията на повърхнината с равнини, успоредни на координатните равнини са елипси.

Ако $a = b = c = R$, елипсоидът е централна сфера

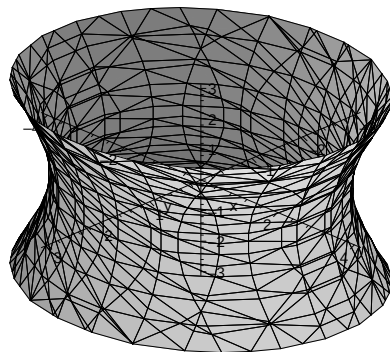
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Ако центърът на сферата е $C(x_0, y_0, z_0)$, уравнението на сферата е

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

ХИПЕРБОЛОИД С ЕДНА ПОВЪРХНИНА

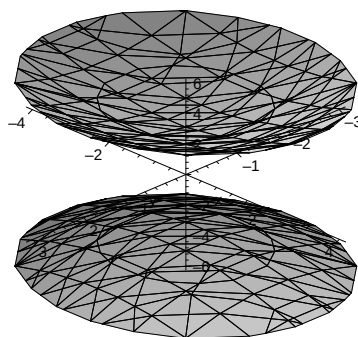
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Хиперболоидът с една повърхнина е повърхнина, която също е симетрична спрямо координатните равнини и координатното начало, защото и трите променливи са на втора степен. Сеченията на повърхнината с равнини, успоредни на координатната равнина Oxy са елипси, а с другите две координатни равнини са хиперболи. Може да се покаже, че хиперболоидът с една повърхнина е праволинейна повърхнина, като съществуват две фамилии успоредни прави линии, които го образуват. През всяка точка на хиперболоида с една повърхнина минава по една линейна образувателна от двете фамилии.

ХИПЕРБОЛОИД С ДВЕ ПОВЪРХНИНИ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



От

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1 = \frac{z^2 - c^2}{c^2}$$

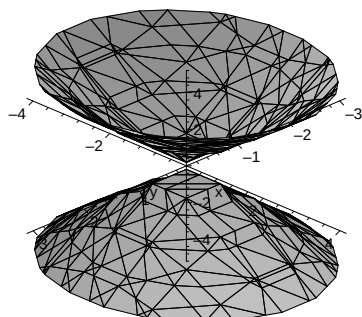
следва

$$(z - c)(z + c) \geq 0, \quad \text{т.е.} \quad |z| \geq c$$

Сеченията на повърхнината с равнини, успоредни на координатната равнина Oxy са елипси, а с другите две координатни равнини са хиперболи.

КОНУС

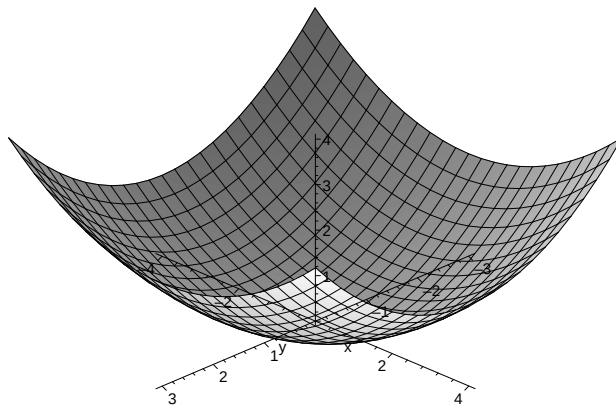
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Върхът на конуса е в началото на координатната система. Конусът е симетричен спрямо координатните равнини и координатното начало, защото уравнението му не се изменя, ако заменим x с $-x$, y с $-y$ и z с $-z$. Равнините, успоредни на координатната равнина Oxy , го сечат в елипси, а равнините минаващи по оста z ($y = kx$) го пресичат в две пресичащи се прави линии, които са образувателните му. Равнините, успоредни на образувателните го сечат в параболи, а равнините, успоредни на оста z в хиперболи. Поради тази причина, още от древните гърци, елипсата, хиперболата и параболата са познати като *трите конусни сечения*.

ЕЛИПТИЧЕН ПАРАБОЛОИД

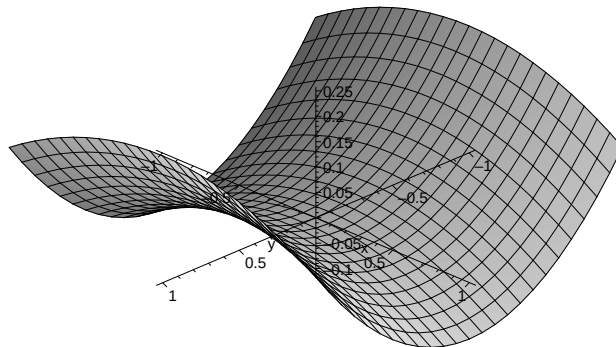
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$



Елиптичният параболоид минава през началото на координатната система и е разположен над равнината Oxy . Оста z е ос на симетрия, защото уравнението му не се изменя, ако заменим x с $-x$ и y с $-y$. Той е симетричен спрямо координатните равнини Oxz и Oyz . Равнините, успоредни на координатната равнина Oxy , го сечат в елипси, а равнините минаващи по оста z го пресичат в параболи.

ХИПЕРБОЛИЧЕН ПАРАБОЛОИД

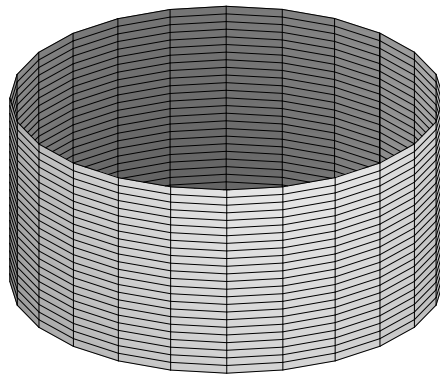
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



Хиперболичният параболоид (седло) минава през началото на координатната система. Оста z е ос на симетрия. Той е симетричен спрямо координатните равнини Oxz и Oyz . Равнините, успоредни на координатната равнина Oxy , го секат в хиперболи. Равнината Oxy ($z = 0$) го пресича в две прави линии - $y = \pm \frac{b}{a}x$. Равнините, минаващи по оста z го пресичат в параболи. Може да се покаже, че хиперболичният параболоид е праволинейна повърхнина, образувана от две фамилии прави линии.

ЕЛИПТИЧЕН ЦИЛИНДЪР

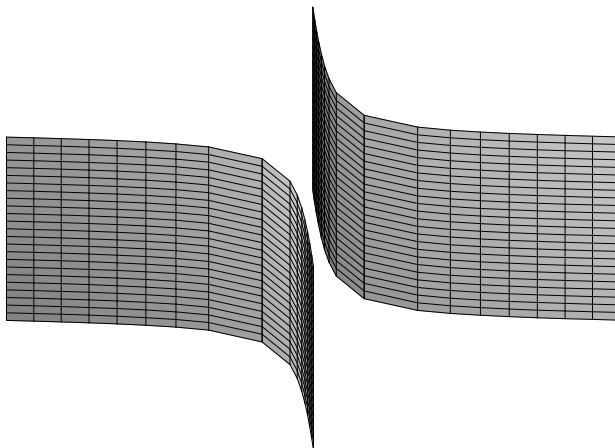
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Елиптическият цилиндър е повърхнина с управителна крива елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и образувателна, успоредна на оста z .

ХИПЕРБОЛИЧЕН ЦИЛИНДЪР

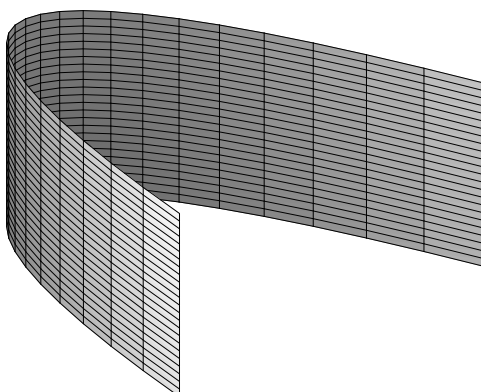
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Хиперболичният цилиндър е повърхнина с управителна крива хиперболата $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и образувателна, успоредна на оста z .

ПАРАБОЛИЧЕН ЦИЛИНДЪР

$$y^2 = 2px$$



Параболичният цилиндър е повърхнина с управителна крива параболата $y^2 = 2px$ и образувателна, успоредна на оста z .

ЗАДАЧИ

11.1 Намерете центъра и радиуса на сферата $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 22 = 0$.

Решение: Отделяме точни квадрати

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z - 22 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + z^2 - 6z + 9 - 9 - 22 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 36 = 6^2$$

Следователно центърът на сферата е $C(1, -2, 3)$ и радиусът е $R = 6$.

11.2 Напишете уравнението на сфера с диаметър AB : $A(-4, 1, 0)$, $B(2, 3, 4)$.

Решение: Центърът на сферата $C(-1, 2, 2)$ е средата на отсечката AB , а радиусът е

$$R = |CB| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

Следователно уравнението на сферата е $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 14$.

11.3 Намерете дължината на хордата, която се получава при пресичането на сферата $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ с правата $g: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{0}$.

Решение: Написваме скаларно-параметричните уравнения на правата

$$g: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 \end{cases}$$

Заместваме $x = 1 + 2t, y = 2 - t, z = -1$ в уравнението на сферата и получаваме квадратното уравнение

$$(1 + 2t)^2 + (2 - t)^2 + 1 + 2(1 + 2t) + 4(2 - t) - 20 = 0$$

$$5t^2 - 4 = 0$$

Корените му са

$$t = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

и следователно пресечните точки на правата и сферата са

$$M\left(1 + \frac{4}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{2}{\sqrt{5}}, -1\right), \quad N\left(1 - \frac{4}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{2}{\sqrt{5}}, -1\right).$$

Дължината на хордата MN е $d = |MN| = \sqrt{\frac{64}{5} + \frac{16}{5}} = \sqrt{16} = 4$.

Задачи за самостоятелна работа:**11.4** Намерете центъра и радиуса на сферите:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 2z + 10 = 0$

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z - 7 = 0$

Отг. $C(3, -4, 1), \quad R = 4$

$C(0, 0, 3), \quad R = 4$

11.5 Как са разположени спрямо сферата $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 11 = 0$ точките $A(-2, 0, 1)$, $B(1, 2, -2)$, $C(5, 3, \sqrt{3})$?

Отг. А - външна, В - вътрешна, С - принадлежи

11.6 Напишете уравнението на сфера с диаметър AB .

а) $A(3, 2, -1), \quad B(5, 6, 5)$

б) $A(-1, -3, 2), \quad B(-3, 1, 6)$

Отг. $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 14$

$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 9$

11.7 Напишете уравнението на сфера с център $C(4, 5, -2)$, която се допира до сферата $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 36 = 0$.

Отг. $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z + 2)^2 = 25$

$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z + 2)^2 = 1$

11.8 Напишете уравнението на сфера, която минава през точките $A(1, 2, 2)$ и $B(1, 0, 0)$, ако центърът и лежи на правата $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$.

Отг. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$

11.9 Напишете уравнението на сфера, която минава през точките $A(1, 2, -4)$, $B(1, -3, 1)$ и $C(2, 2, 3)$, ако центърът и лежи в равнината Oxy .

Отг. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26$

11.10 Намерете центъра и радиуса на окръжността, получена от пресичането на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ с равнината $2x + 2y - z - 18 = 0$.

Отг. $C(4, 4, -2), \quad R = 8$

11.11 Какви повърхнини определят следните уравнения. Направете чертежи.

- а) $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$
- б) $9x^2 + 3y^2 - 27z^2 = 9$
- в) $5x^2 + 10y^2 - z^2 = -10$
- г) $3x^2 + y^2 - z^2 = 0$
- д) $3x^2 + y^2 = 9z$
- е) $x^2 - y^2 = 8z$
- ж) $x^2 + 4y^2 = 4$
- з) $2x^2 - 3y^2 = 6$
- и) $y^2 = 12x$
- к) $x^2 + y^2 = -2z$
- л) $x^2 - 2y^2 + z^2 = 0$
- м) $4x^2 + y^2 = -8z$

- | | | | |
|---------|-------------------------|----|-----------------------|
| Отг. а) | елипсоид | ж) | елиптичен цилиндър |
| б) | хиперболоид | з) | хиперболичен цилиндър |
| в) | хиперболоид | и) | параболичен цилиндър |
| г) | конус | к) | ротационен параболоид |
| д) | елиптичен параболоид | л) | конус |
| е) | хиперболичен параболоид | м) | елиптичен параболоид |

11.12 Какви повърхнини определят следните уравнения. Направете чертежи.

- а) $x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 4z + 1 = 0$
- б) $x^2 + 2y^2 - 8z^2 + 4x = 0$
- в) $2x^2 + 4y^2 - z^2 + 8z - 16 = -4$
- г) $3x^2 + y^2 - z^2 + 6z - 9 = 0$
- д) $3x^2 + 9y^2 - 9z = 27$
- е) $x^2 - 2y^2 = 8(z - 2)$
- ж) $x^2 + 4y^2 - 2x = 3$
- з) $x^2 - 3z^2 = 6$
- и) $x^2 = 6z$
- к) $x^2 - 2z - 2 = 0$
- л) $z^2 + 3y^2 - 6(x - 1)^2 = 0$
- м) $4x^2 + y^2 = 16 - 8z$

- | | | | |
|---------|-------------------------|----|-----------------------|
| Отг. а) | елипсоид | ж) | елиптичен цилиндър |
| б) | хиперболоид | з) | хиперболичен цилиндър |
| в) | хиперболоид | и) | параболичен цилиндър |
| г) | конус | к) | параболичен цилиндър |
| д) | елиптичен параболоид | л) | конус |
| е) | хиперболичен параболоид | м) | елиптичен параболоид |

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Димова В.С., Н.С. Стоянов, Висша математика. Част 1. София, Техника, 1977.
- [2] Топенчаров В., Н. Стоянов и др. Сборник от задачи по висша математика. Част 1. София, Техника, 1979.
- [3] Станилов Г., Аналитична геометрия. София, Наука и изкуство, 1975.
- [4] Практикум по линейна алгебра и аналитична геометрия. Катедра “Математика“, ВМЕИ, Габрово, 1987.
- [5] С. Капралов, Р. Даскалов, П.Събев, Е. Методиева, Сборник по аналитична геометрия. ТУ-Габрово, 1996.
- [6] А. Атанасов, В. Терзиева, Р. Даскалов, С. Капралов, Сборник от решени задачи по висша математика, Алма матер интернационал, 1998.
- [7] Шопова М., К. Чиприянова и др., Сборник от задачи по висша математика. Свищов, 1992.
- [8] Пискунов Н.С., Дифференциальное и интегральное исчисления. Том I, Москва, Наука, 1978.
- [9] Фаддеев Д.К., И.С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре. Москва, Наука, 1972.
- [10] Болгов В.А., Б.П. Демидович, Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Москва, Наука, 1986.
- [11] Бугров Я.С., С.М. Никольский, Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Москва, Наука, 1986.
- [12] Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. Минск, Высшэйшая школа, 1982.
- [13] D.C. Lay, Linear Algebra and its applications, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.
- [14] Hirsch L., A. Goodman, Understanding Intermediate Algebra, West Publ. Company, Minnesota, 1987.
- [15] Larson R., B. Edwards, Finite Mathematics with Calculus, D.C. Heat and Company, Lexington, Massachusetts, 1991.
- [16] Papula L., Mathematik fur ingenieure, I, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991.
- [17] G. Eisenreich, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Academie Verlag GmbH, Berlin, 1991.